口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列

概率论与数理统计
习题精解巧析

李　曦　主　编
陈艳君　副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是作者 20 余年教学经验的结晶。作者在广泛收集、细致筛选习题素材的基础上，用 55 个知识点将概率论与数理统计课程“庖丁解牛”，并且设法将各个知识点根据知识体系及解题方法有机地联系起来，体现了本系列图书一贯的先以思想引出方法，再以方法指导解题的“化繁为简学习法”的总构思。

本书分为 8 篇，分别是随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验，每篇均由知识网络图、章节综述、若干知识点、综合测试题及详解组成。知识网络图可使读者形成知识框架，是学习本课程及解题的思维导图；章节综述言简意赅，系统解释知识网络图，是连接各章节及各个知识点的枢纽；题目按难度系数分为 5 类，循序渐进；题目的解析，从宏观思想方法到微观的解题技巧两方面深入解剖，其中穿插的 8 大“招数”是作者在海量题目中提炼出的解题技巧的精华。

本书每个章节及知识点中均穿插“书链”二维码，内含更多免费资源。本书适合考研复习和初学本课程的学生作为强化练习使用，也适合大学教师用于教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计习题精解巧析 / 李曦主编. —北京：电子工业出版社，2016.7
口袋题库考研数学“化繁为简”轻松学系列
ISBN 978-7-121-29351-1

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—题解 ②数理统计—高等学校—题解　Ⅳ. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 157828 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　　特约编辑：刘　凡
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：20　字数：455 千字
版　　次：2016 年 7 月第 1 版
印　　次：2016 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254473、qiyue@phei.com.cn。

前　　言

《高等数学习题精解巧析》、《线性代数习题精解巧析》及《概率论与数理统计习题精解巧析》是我们编写的系列习题书，此书是继《线性代数习题精解巧析》之后的第二本习题书。我们考虑到此类书多而繁杂，深感若不能写出特色，则很难被读者认可，因此殚精竭虑，力图将我们多年教学之精华全倾注于这套书中。

在写本套书之前，我们已经总结出了学习大学数学的**“化繁为简学习法”**。此方法立足于知识点的概括与联系，力图将繁杂不堪的知识点变得简单易懂。其特点是以思想提炼方法，以方法指导繁杂的题型，以专题带动知识点。若运用此方法，将彻底打破数学学习枯燥刻板的印象，给学习者一种全新的体验。

就概率论与数理统计课程而言，其内容比高等数学课程的内容少很多，题型的变化也不如后者。但是本课程的特点在于它研究的是“不确定的现象”，而高等数学与线性代数研究的对象都是“确定的现象”。高等数学的内容可以认为是中学数学的内容加上“极限”的思想而已，是在中学数学的学习基础上的再提高；而概率论与数理统计则可以看成高等数学中微积分部分的一个具体而生动的应用，因此本课程与高等数学课程具有较强的相关性，具有良好的高等数学基础加上理解概率模型是学好本课程的保证。学习本课程最重要的是理解其中的基本概念，掌握建立概率模型的方法。概率模型有“集合模型”与“函数模型”两种，其中函数模型是建立在集合模型的基础之上的。本课程分为两大部分，即概率论部分与数理统计部分，概率论是理论基础，数理统计是实际应用，其中第 5 篇是连接两者的中心枢纽。为了帮助同学们在较短的时间内掌握本课程的中心思想与主要解题方法，我们特编写本书，并计划编写《考研概率论与数理统计专题全讲》。我们会在多年教学实践的基础上，将“化繁为简学习法”进行到底，将概率论与数理统计的核心问题概率——随机变量及其分布——多维随机变量及其分布等内容通过专题形式紧密地联系起来，这样就可以让所有习题真正生动起来。我们不做习题的“搬运工”，而是要引导学生在题海中畅游无阻。

为了帮助同学们学好概率论与数理统计课程，本书的解决方案是在结构上以细分知识点为主，运用“化繁为简”的思想，先将所有知识点联系起来引出整本书的“思维导图”，同时在每一篇前面也各有一个框图，这些图可反映出几个方面：一是反映知识点之间的联系，不让每个知识点成为“孤岛”，让学生在各个知识点之间能够通行无阻；二是引导学生有目的地选择题目来练习，也就是说，不一定要按部就班地沿着知识点的顺序

机械地去做题，通过这些图可以引导学生有选择性、有重点地做题，大大提高学习的效率；三是通过这些图让大家明白综合题的出题思路，从而顺利拆解综合题。

本书将概率论与数理统计课程精确地分为55个知识点，每一个知识点均为一个最小的功能模块：知识点内容包含其涉及的定理、定义、结论与解题方法综述等，相关的习题按照5个等级的难点尽可能铺开，习题皆精选而来且比较全面，有精细的解析，部分习题后面有精彩的点评，中间插入一些“小而精”的总结。总结中有不少原创的或归纳的方法，我们将其总结为8大招数：**妙招、怪招、险招、绝招、奇招、趣招、无招胜有招、比招**，合起来就是**“妙怪险绝，奇趣无比”**。

最具吸引力的是，书中每一个知识点均加入“口袋题库考研”App的二维码，学习者只要在书中扫一扫，即可进入一种全新的学习模式：共享海量学习资源，吸取前人的学习经验，与学长、专家零距离互动等，最大限度地提高学习数学的效率。口袋题库考研学习平台与本书联合，学习者与作者零距离互动，书中的不足将在第一时间反馈到作者的面前，使得习题书的更新速度加快，习题书于是有了自我修复、自身造血的强大功能。最可喜的是，口袋题库考研作为线上平台可与书籍系列形成线上与线下互相补充、相得益彰的局面，这是其他同类书籍所不具备的优势。

总之，本习题书系列与其他同类习题书不同的特色是：打破习题书总结大同小异、大而散、中心不突出的现象，力求做到形散而神不散，简约而不简单，既有引导、又有独特的解题招数。更重要的是在形式、结构与内容上均有所突破，令人耳目一新、一目了然。

本书既适合考研的学生，同时也适合初学的学生，不过对于初学者来说，可能会感到题型略微偏难一些，它最适合基础中等以上的学生。当然对教师而言，它也是一个不错的题库，因为题型十分丰富，可供教师教学研究和出卷参考使用。

本书的关联平台除口袋题库考研外，瀚海网（http://hanhai.org）也将有与书籍对应的题库内容供大家试读，题库中的题量比书籍大一倍左右，可供学生补充使用。其他任何个人和机构不可发布本系列书籍与题库中的内容，若需合作，必须与口袋题库考研及瀚海网联系。

本书与另两本习题书是不可分割的整体，整套习题书为邹群老师总负责。在本书中，邹群老师为参编，负责整本书文字和风格的统一以及终审工作。最后，向为本书提供资料、提供建议及参与本书编辑修改工作的所有老师们致以深深的敬意和诚挚的谢意！由于水平及编写时间有限，书中错、漏难免，也欢迎读者批评指正！

本书的所有参与编写人员如下：

主编：李曦　南昌航空大学

副主编：陈艳君　南昌大学科学技术学院

参编：邹群　南昌航空大学。

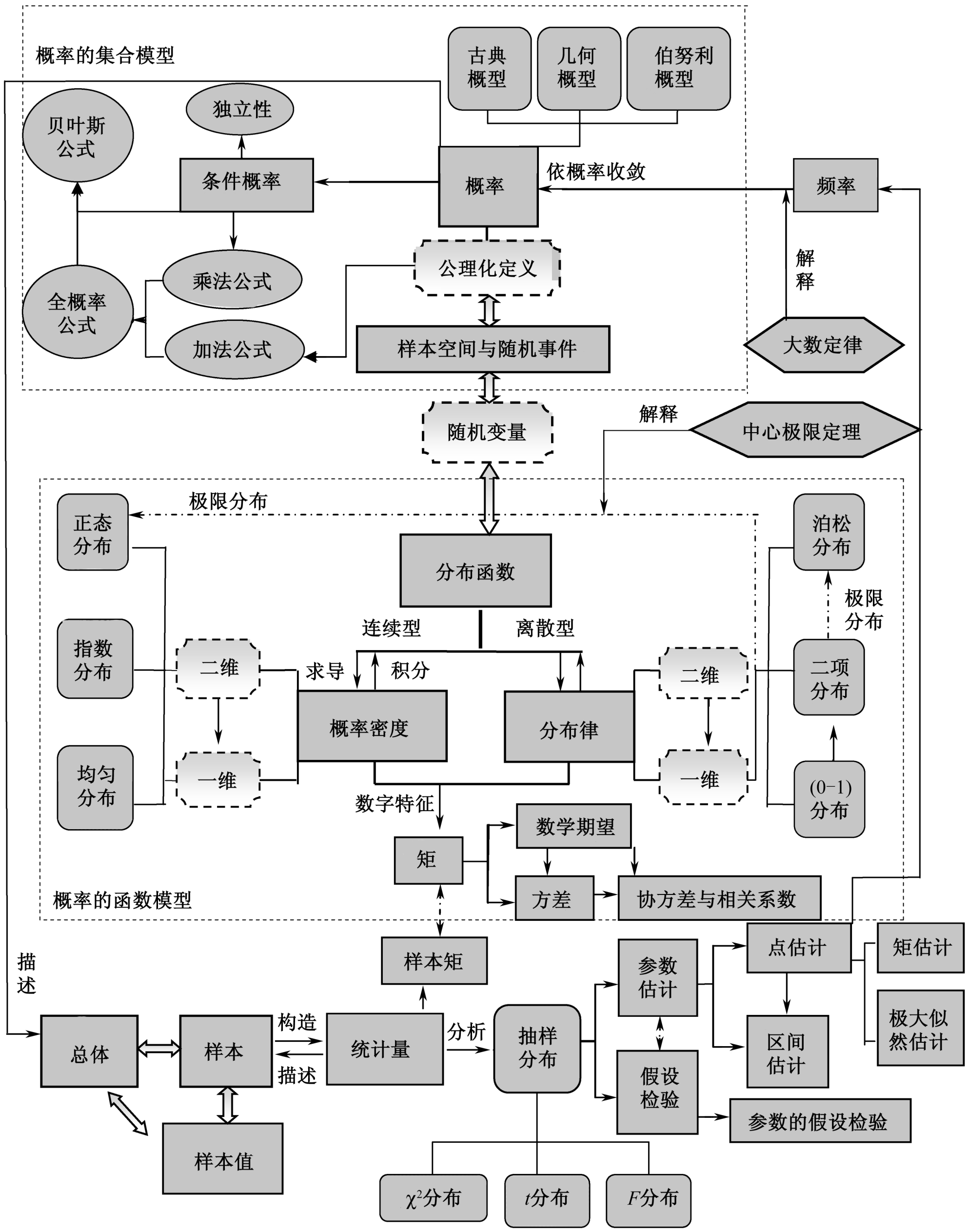
主编　李　曦

2016年3月于南昌航空大学

目　录

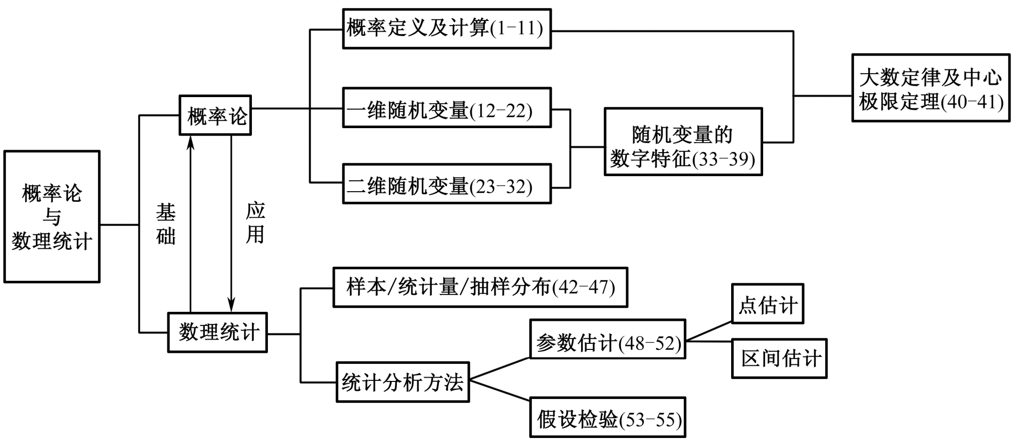
0　总框图及全课程综述

0.1　《概率论与数理统计》知识网格结构图



注：括号内的序号为对应知识点的序号。

0.2 《概率论与数理统计》知识点总框图



0.3 全课程综述

书链二维码:

概率论与数理统计是理工科各专业的重要基础理论课程，是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，其理论及方法与数学其他分支相互交叉、渗透，已经成为许多自然科学学科、社会与经济科学学科、管理学科的重要理论工具。由于它具有很强的应用性，并且随着统计应用软件的普及和完善，其应用面几乎涵盖了自然科学和社会科学的所有领域。

本课程由概率论与数理统计两部分组成。第 1～6 篇是概率论的内容，侧重于理论探讨，通过概率论的一系列基本概念，建立概率的集合模型与函数模型，以寻求用数学分析研究不确定性现象的方法。第 1 篇首先根据随机试验的结果和研究目的，提出样本空间、随机事件等概念，这些概念都是由集合来定义的，这使得事件可通过集合及其运算来表示。随机现象中事件的发生具有偶然性，而偶然中又含有必然，因此需要给出衡量事件发生的可能性大小的度量，即概率的概念。概率的公理化定义的产生和发展经历了多个历史阶段，其中包含的诸性质是计算概率的基础。为了研究问题方便，将类似的随机试验归纳成一些概率模型，如古典概型、几何概型、伯努利概型等。条件概率表示已知一事件发生的条件下另一事件发生的概率，它也是概率，只是它反映了随机事件之间

相互联系的事实。利用条件概率的概念式既可将其转化为乘法公式用来计算积事件的概率，又可与加法公式相结合构成全概率公式用来计算复杂事件的概率，贝叶斯公式是条件概率概念式与全概率公式的综合式，在实际应用中经常出现。事件独立是指事件之间互不影响，在事件独立下乘法公式变得更加简单，因此要掌握事件独立性的判断方法。总之，第 1 篇建立了概率的集合模型，它为第 2、3 篇概率的函数模型打下了坚实的基础。

第 2、3 篇建立了概率的函数模型。第 2 篇首先提出随机变量的概念，它不仅是联系概率的集合模型与函数模型的纽带，而且可将概率问题转化为函数问题来研究。随机变量是定义在样本空间的一个单值实值函数，主要分为离散型随机变量和连续型随机变量。分布函数是描述随机变量的基本函数，它可将随机事件通过函数来表示，分布函数具有诸多重要的性质，这些性质是解决概率问题的基础。离散型随机变量的取值为有限个或无限但可列多个，除分布函数外，还可用分布律来描述，分布律的优点是可以明确每一个单值对应的概率，分布函数与分布律之间可相互转化。常见的离散型分布需要掌握 0-1 分布、二项分布、泊松分布，必须掌握其特征及随机试验的背景。连续型随机变量的取值为连续区间，它是通过概率密度函数定义的，其优点是可以更直观地描述随机变量在各个区间取值的密集程度。分布函数与概率密度函数可通过求导与定积分相互转化，由此可知用一元函数的微积分可以完美地解决一维连续型随机变量的各种概率问题。连续型随机变量需要掌握均匀分布、正态分布、指数分布，必须清楚这些随机变量的表述、性质、数字特征及其应用。随机变量的函数仍是随机变量，求解随机变量的函数的分布需要通过分布函数建立事件之间的联系。

第 3 篇将一维随机变量的结论推广到多维随机变量，它并不是多个随机变量的简单叠加，其中还包括随机变量之间的相互联系。本课程主要讨论二维随机变量，从二维到多维可自然地拓展。对二维随机变量，首先讨论其联合分布函数，其次讨论边缘分布函数；相应地针对二维连续型随机变量讨论了联合概率密度和边缘概率密度，离散型随机变量讨论了联合分布律和边缘分布律。二维分布函数与概率密度函数之间可通过求偏导与重积分相互转化，由此可知利用二元函数的微积分可以完美地解决连续型随机变量的各种概率问题。本课程还讨论了条件分布及两个随机变量的独立性问题，这些问题是第 1 篇随机变量的条件概率与独立性的函数表达。多维随机变量的函数同样是随机变量，其分布的讨论相对较难，但必须掌握一些简单函数的分布。

第 4 篇讨论随机变量的数字特征。概率分布描述的是随机变量的整体，而随机变量的数字特征是刻画随机变量的某一方面，必须理解随机变量的数学期望、方差、各阶矩、协方差与相关系数的本质涵义，掌握数学期望、方差、协方差与相关系数的性质，熟练运用各种计算公式；必须记住一些常见概率分布的数字特征，掌握处理数字特征的常用方法；其中随机变量的数学期望是所有数字特征的核心概念，其他数字特征的计算均可转化为随机变量函数的数学期望计算。

第 5 篇是概率论的最后一部分的内容，也是连接概率论与数理统计的枢纽。首先讨论切比雪夫不等式及三个不同条件下的大数定律，大数定律严谨地证明了大样本下频率值趋于稳定的特性以及用频率定义概率的合理性；其次讨论不同条件下的中心极限定理，这些定理一方面说明了正态分布的常见性与重要性，另一方面给出大量随机变量的和所

表示的事件的概率计算方法。本章必须了解大数定律的理论意义并熟练掌握中心极限定理的应用。

第 6～8 篇是数理统计的内容。数理统计是以概率论为理论基础，研究如何对随机试验结果进行统计推断的数学分支，具有广泛的应用。第 6 篇首先从总体、样本与样本值进行讨论。样本是一组随机变量的集合，它是连接总体与样本值的纽带，因此选取样本是讨论统计问题的关键，本课程仅讨论简单随机样本，其中随机变量独立同分布的特点是研究样本的基础，从样本中产生一些常见的统计量，将统计量的分布称为抽样分布，它是进行统计推断的前提。统计中常见的抽样分布有三大分布：χ^2 分布、t 分布、F 分布，必须清楚各自的定义、性质、结构、特点及通过查表计算其所表示的事件的概率的方法。其次必须掌握正态总体的样本均值和样本方差的分布，最后将两者结合给出抽样分布。

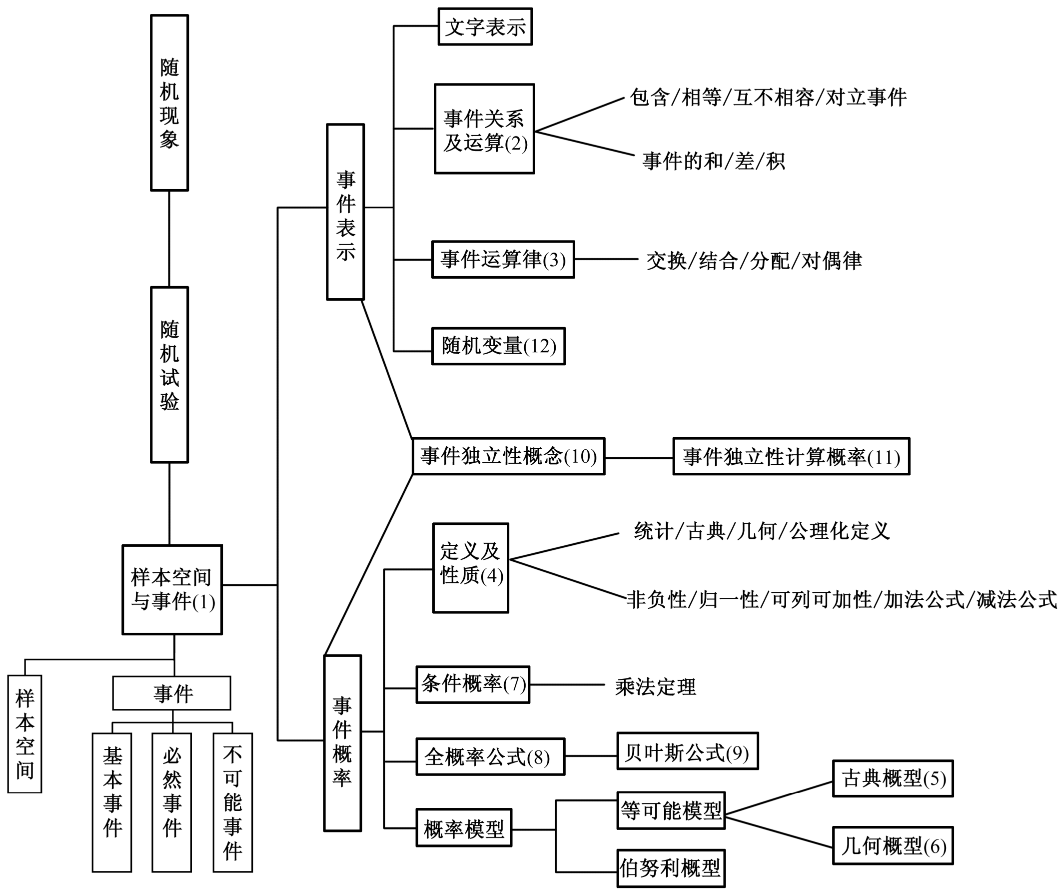
数理统计具体包括参数估计与假设检验两部分。第 7 篇在掌握抽样分布的基础上讨论了对总体分布的参数估计，分为参数的点估计和区间估计，这两种估计各有优劣。常用的点估计包括矩估计法和极大似然估计法；由于估计方法的不同往往会造成结果不同，所以可基于概率理论讨论估计的若干评价标准。区间估计建立在无偏点估计的基础上，可通过置信度控制估计的精确度，它包括单侧置信区间和双侧置信区间两大类型，本课程分别讨论了一个正态总体和两个正态总体的区间估计。

第 8 篇讨论假设检验问题。假设检验分为针对分布的假设检验与针对参数的假设检验两大类。这里仅要求讨论针对参数的假设检验，其基本思想是“小概率事件可认为不可能发生”，它基于小概率事件在一次试验中几乎不会发生的事实。其步骤为：提出假设—选择统计量—通过样本值求解—判断。其中显著性水平是控制第一类错误发生概率的参数。本课程讨论了一个正态总体下的均值及方差的假设检验问题及两个正态总体下的均值及方差的假设检验问题。

参数估计与假设检验是统计推断中的两个不同问题，但是它们之间也有联系。

第1篇　随机事件与概率

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 1 篇

综　述

更多资源请扫二维码：

客观世界中存在的许多不确定的现象，称为随机现象。随机现象具有偶然性，但偶然性中蕴含着必然性，必然性必须从大量的重复试验中得来。概率论就是定量地研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科。

本篇从随机试验出发，根据研究的目的，产生试验的样本空间(1)，即随机试验的所有可能结果，再由样本空间产生随机事件，即样本空间的子集，而集合具有关系与运算，可以据此讨论事件的关系(2)、运算及运算规律(3)，从而定义出各种各样的事件。在随机试验中，不仅要清楚可能发生哪些事件，更要清楚这些事件发生的可能性大小，因此从事件发生的频率引出概率的公理化定义(4)，这一定义中的三大性质是从频率的三大性质引申而来的，这些性质是概率计算的基础。除了公理化定义以外，历史上也曾以统计定义（频率定义）、古典定义、几何定义等方式来定义概率。等可能概型是一个重要的概率问题模型，它被分为古典概型与几何概型两大类，古典概型研究的样本空间只有有限个样本点，排列组合是讨论该问题的主要手段；几何概型研究的样本空间有无限个样本点，常涉及时间、区间、面积等方面，区间的测度是讨论该问题的重要手段。

条件概率(7)是概率的一种重要形式，其本身也是事件的概率，常用两种方法计算。将条件概率的定义式变形可得乘法公式，乘法公式与概率定义引出的加法公式是计算多个事件概率的两大常用公式，加法公式与乘法公式相结合可得出全概率公式(8)，该公式常用于计算“由因求果”的概率，条件概率和全概率公式相结合可得贝叶斯公式(9)，该公式常用于计算“由果求因”的概率。

独立性是概率论中一个重要的概念，所谓两个事件独立，指的是两个事件的发生互不影响，即条件概率与无条件概率相等。本篇的事件的独立性(10)和下一篇的随机变量的

独立性有密切的联系。在概率问题的处理中，首先要判断哪些事件是相互独立的，再利用独立性来简化概率计算。伯努利概型 (11) 是应用事件独立性计算概率的重要模型，但要注意伯努利概型中每次试验的结果只有两个。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点1　样本空间、随机事件的概念

更多资源请扫二维码:

1.1　概念、结论

1．概念

定义 1.1.1　确定性现象　客观世界中某种结果必定发生或必定不发生的现象。特点：事先可以断定其结果。

定义 1.1.2　随机现象　客观世界中，在相同条件下，其结果具有多种可能情况的现象。特点：事先不能预言哪一种可能结果出现；大量随机现象一定具有表面上的偶然性与内部蕴含着的必然性。

定义 1.1.3　随机试验　满足下面的三个条件的试验称为随机试验：（1）在相同的条件下，试验可以重复地进行；（2）试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；（3）在进行试验前不能确定出现哪一个结果。

定义 1.1.4　基本随机事件（样本点）　随机试验中，每一个可能出现的不可分解的结果，一般用ω来表示。

定义 1.1.5　样本空间　随机试验中全体基本事件构成的集合，一般用Ω或S表示。

定义 1.1.6　随机事件　随机试验的样本空间S的子集称为随机事件，通常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示。

定义 1.1.7　必然事件　在一次试验中，一定出现的事件，一般也用Ω表示必然事件。

定义 1.1.8　不可能事件　在一次试验中，一定不出现的事件，一般用$\varnothing$表示不可能事件。

2．结论

结论 1.1.1　一个随机事件就是由Ω中的若干样本点（基本事件ω）组成的集合，它们是Ω的子集，事件A发生当且仅当A中一个样本点对应的基本事件发生。

结论 1.1.2　如果样本点ω是事件A的组成部分，即ω在事件A中出现，记为$\omega\in A$。如果在一次试验中所出现的ω满足$\omega\in A$，则称在这次试验中事件A发生；如果ω不是事件A的组成部分，即ω在事件A中未出现，记为$\omega\notin A$。在一次试验中，所出现的ω满

足 $\omega \notin A$，则称此次试验 A 没有发生。

1.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 2
- **主要题型**：写出随机试验中的样本空间或事件。
- **综述**：样本空间是随机试验中所有可能结果构成的集合。在同一随机试验中，由于有时候试验目的不同，所以其样本空间也可能不相同。样本空间作为集合，了解其中的元素是解决相关问题的基础，随机事件对应集合的子集，可见随机试验以集合作为模型，掌握从实验结果到集合的对应关系是进行概率计算的基础。

1.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 12.3.2　例 12.3.4

例 1.3.1（难度系数 0.2）　写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点：将一颗骰子掷两次，记录出现的点数。用符号 A 表示‘两次点数之和为 10’，B 表示‘第一次的点数，比第二次的点数大 2’。

解析：确定样本空间是计算概率的基础，一般根据试验及其目的，结合加法原理或乘法原理即可列举出样本空间的元素。

解：样本空间为

$S = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$；

两个事件分别为 $A=\{(4,6),\ (5,5),\ (6,4)\}$；$B=\{(3,1),\ (4,2),\ (5,3),\ (6,4)\}$。

例 1.3.2（难度系数 0.2）　写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点：将一颗骰子掷两次，记录两次骰子出现的点数之和；A 表示出现偶数，B 表示点数之和大于 6。

解析：样本空间的确定要根据试验及其目的，二者缺一不可。相同的试验若目的不同则样本空间就不同。

解：样本空间为 $\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，两个事件分别为 $A=\{2,4,6,8,10,12\}$，$B=\{7,8,9,10,11,12\}$。

例 1.3.3（难度系数 0.4）　设随机试验 E 为在一定条件下掷一颗骰子，观察出现的点数，问该试验中能产生多少个事件？

解析：根据集合的原理，一个元素数目为 n 的有限集合其所有不同子集个数共为 2^n 个，因此相对应可产生 2^n 个事件。

解：记 ω_i（$i=1,2,\cdots,6$）为出现第 i 个点的事件。于是有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$。样本空间中共有 6 个元素，根据集合的性质知，可产生 $2^6=64$ 个子集，故能产生 64 个事件。

招数 1.3.1　妙招：因为事件对应样本空间的子集，所以可利用集合处理事件。

例 1.3.4（难度系数 0.4，跨知识点 4）　设 A、B 为两个事件，且 $B\subset A$，则下列各式中正确的是（　　）。

（A）$P(A\cup B)=P(A)$　　　　（B）$P(AB)=P(A)$

（C）$P(B|A)=P(B)$　　　　（D）$P(B-A)=P(B)-P(A)$

解析：根据事件与集合的关系，子事件相当于子集合，事件的运算相当于集合的运算。

因为 $B\subset A\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)$，所以（A）成立;（B）只有在 $A\subset B$ 时成立;（C）只有在 A、B 独立时成立;（D）也只有在 $A\subset B$ 时成立。故选择（A）。

解：（A）。

知识点 2　事件的关系及运算

更多资源请扫二维码:

2.1　概念、结论

1．概念

定义 2.1.1 子事件　设 A、B 为两个事件。如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

定义 2.1.2 事件等价或相等　设 A、B 为两个事件，若事件 A 与事件 B 互为子事件，则称事件 A 与事件 B 等价。

定义 2.1.3 事件的交　设 A、B 为两个事件，把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的事件称为事件 A 与 B 的交或积，记为 $A\cap B$ 或 AB。

定义 2.1.4 事件的并　设 A、B 为两个事件，把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的事件称为事件 A 与 B 的并或和，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$。

定义 2.1.5 差事件　事件 A 发生而且事件 B 不发生的事件叫事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$。

定义 2.1.6 互不相容事件（互斥事件）　设 A、B 为两个事件，如果 $AB=\varnothing$，那么称事件 A 与 B 互不相容。

定义 2.1.7 逆事件（对立事件）　对于事件 A，把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆事件，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$。

定义 2.1.8 完备事件组　若 $A_iA_j=\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组。

2．结论

结论 2.1.1　对任意事件 A 均有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$。

结论 2.1.2　对任意事件 A、B 有：$A\subset A\cup B$；$AB\subset A$；$A\cup A=A$；$AA=A$。

结论 2.1.3　对任意事件 A、B 有：① $A-B\subset A$；② $A-B=A-AB$；③若 $A\subset B$，则有 $A-B=\varnothing$；

结论 2.1.4　关于相互对立的事件 A 及 $\overline{A}$ 有：$\begin{cases}A\cdot\overline{A}=\varnothing,\\ A\cup\overline{A}=\Omega。\end{cases}$ 设 A、B 为对立事件，则 A、B 互不相容；但反之不成立；

结论 2.1.5　若 $AB=\varnothing$ 或 $BC=\varnothing$ 或 $AC=\varnothing$，则 $ABC=\varnothing$；但反之不成立。

2.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 3，知识点 4
- **主要题型**：事件的表示及运算。
- **综述**：由于随机事件是样本空间的子集，事件的关系对应集合的关系，所以借助集合可以理解事件。由于同一事件有多种表示方式，所以判断等价事件及掌握事件的各种等价表示法有利于解决问题，事件的等价可以从集合、事件的含义、数学运算等方面进行判断。事件运算对应集合运算，可利用集合的文氏图进行辅助分析。

2.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 3.3.2

例 2.3.1（难度系数 0.2）　若 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；$A=\{1,3,5\}$；$B=\{1,2,3\}$。

求：（1）$A+B$；（2）AB；（3）$\overline{A}$；（4）$\overline{B}$；（5）$\overline{A+\overline{B}}$；（6）$\overline{AB}$；（7）$\overline{A}+\overline{B}$；（8）$\overline{A}\overline{B}$。

解析：解涉及集合的题目常借助文氏图直观地表示事件的关系和运算。

解：（1）$A+B=\{1,2,3,5\}$；（2）$AB=\{1,3\}$；（3）$\overline{A}=\{2,4,6\}$；（4）$\overline{B}=\{4,5,6\}$；（5）$\overline{A+\overline{B}}=\{2\}$；（6）$\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$；（7）$\overline{A}+\overline{B}=\{2,4,5,6\}$；（8）$\overline{A}\overline{B}=\{4,6\}$。

例 2.3.2 （难度系数 0.4） 设 A、B、C 为三个事件，说明下列表示式的意义：

（1） ABC；（2） $AB\overline{C}$；（3） AB；（4） $ABC+AB\overline{C}$。

解析：结合事件运算的规律性，在理解其含义的基础上给出结论。

解：（1） ABC 表示事件 A、B、C 都发生的事件；（2） $AB\overline{C}$ 表示 A、B 都发生且 C 不发生的事件；（3）因为对 C 没有规定，说明 C 可发生，也可不发生，故 AB 表示 A、B 都发生的事件；（4）由于 $ABC+AB\overline{C}=AB(C+\overline{C})=AB$，所以该式同样表示 A、B 都发生的事件。

例 2.3.3（难度系数 0.4）对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\bigcup B=B$ 不等价的是（　　）。

（A） $A\subset B$　　（B） $\overline{B}\subset\overline{A}$　　（C） $A\overline{B}=\varnothing$　　（D） $\overline{A}B=\varnothing$

解析：根据两个事件和的定义，结合子事件及逆事件运算可推知结论。

一方面，由于 $A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$，说明（A）、（B）、（C）等价；另一方面，由于 $A\subset B$，说明 $\overline{A}B\neq\varnothing$ 成立。故与 $A\bigcup B=B$ 不等价的是 $\overline{A}B=\varnothing$，选（D）。

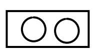
解：（D）。

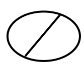
例 2.3.4 （难度系数 0.4） 设事件 A、B 是互不相容事件，则下列结论中正确的是（　　）。

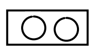
（A） $\overline{A}$、$\overline{B}$ 互不相容　　　（B） $\overline{A}$、$\overline{B}$ 相容

（C） $P(AB)=P(A)P(B)$　　　（D） $P(A-B)=P(A)$

解析：本题考查事件互不相容的概念，通过概率运算可得正确结论。本例也可通过举反例，排除错误结果。

解：（1）如图所示：，此时 $\overline{A}\overline{B}\neq\varnothing$，（A）错误。

（2）如图所示：，此时 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$，则 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，（B）错误。

（3）如图所示：， $AB=\varnothing\Rightarrow P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)\neq 0$，（C）错误。

（4） $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$，故选（D）。

例 2.3.5（难度系数 0.6，2003 年考研数学四真题）对于任意两个事件 A 和 B，_____。

（A）若 $AB\neq\varnothing$，则 A、B 一定独立　（B）若 $AB\neq\varnothing$，则 A、B 有可能独立

（C）若 $AB=\varnothing$，则 A、B 一定独立　（D）若 $AB=\varnothing$，则 A、B 一定不独立

解析：根据事件的关系知，事件之间的“互不相容”与“相互独立”容易从字面上去理解，看起来好像有关系，实际上它们是完全不同的两个概念。

由于 $AB\neq\varnothing$ 时，A、B 可能独立，也可能不独立，所以选择（B）。当 $AB\neq\varnothing$ 时，如 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{12}\neq 0$，这时 A、B 就不独立，所以（A）不成立。而当 $AB=\varnothing$ 时，有 $P(AB)=0$，只有当 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时，A 与 B 才独立；否则 A、B 就不独

立。因此（C）、（D）也不成立。故选择（B）。

解：（B）。

知识点 3　事件的运算律

更多资源请扫二维码:

3.1　概念、结论

1．概念

下列定义中，A、B、C 均表示随机事件。

两个事件的运算规律：

定义 3.1.1 交换律　$AB = BA$，$A \cup B = B \cup A$。

定义 3.1.2 德·摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$，$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

定义 3.1.3 吸收律　若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$AB = A$。

三个事件的运算规律：

定义 3.1.4 分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC$，$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$。

定义 3.1.5 结合律　$A(BC) = (AB)C$，$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$。

推广：当涉及多个事件时，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$。

2．结论

结论 3.1.1　$(A \cap B) \cup A = A$，$(A \cap B) \cup B = B$，$A - B = A\overline{B}$。

结论 3.1.2　事件的各种运算律是计算概率的基础，熟悉运算律有利于更好地分解事件，便于计算事件的概率。有时通过多种方法的比较，可找到最简便的计算方法。

结论 3.1.3　文氏图有利于帮助分析和理解事件及运算，举反例时常借助文氏图。

3.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 2，知识点 4
- **主要题型**：复杂事件的表示及化简。
- **综述**：复杂事件一般都可表示为若干个事件的运算，具体可通过事件（集合）

丰富的运算律如德·摩根律（即对偶律）、分配律等方式转化为相对简单的事件进行处理。

3.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 10.3.1

例 3.3.1（难度系数 0.4）设 A、B、C 是三个事件，在下列各式中，不成立的是（　）。

（A）$(A-B)\bigcup B=A\bigcup B$　　　　（B）$(A\bigcup B)-B=A$

（C）$(A\bigcup B)-AB=A\overline{B}\bigcup\overline{A}B$　　　　（D）$(A\bigcup B)-C=(A-C)\bigcup(B-C)$

解析：概念类选择题。根据基本概念、公式及逻辑关系，对内容进行分析或演算，从而确定正确选项。本题主要考查事件的运算。

（1）由 $(A-B)\bigcup B=A\overline{B}\bigcup B=(A\bigcup B)\bigcap(\overline{B}\bigcup B)=A\bigcup B$，故（A）正确，

（2）由 $(A\bigcup B)-B=(A\bigcup B)\overline{B}=A\overline{B}\bigcup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B\neq A$，故（B）不成立。

（3）由 $(A\bigcup B)-AB=(A-B)\bigcup(B-A)=A\overline{B}\bigcup\overline{A}B$，（C）正确。

（4）由 $(A\bigcup B)-C=(A\bigcup B)\overline{C}=A\overline{C}\bigcup B\overline{C}=(A-C)\bigcup(B-C)$，（D）正确。

故选择（B）。

解：（B）。

例 3.3.2（难度系数 0.4） 设 A、B、C 是随机试验 E 下的三个事件，试用 A、B、C 表示下列事件：（1）A、B、C 中至少有两个发生；（2）A、B、C 中不多于两个发生；（3）A、B、C 中至多有一个发生。

解析：理解描述事件的关键词，将事件转化为集合的运算。

解：根据事件运算的定义，事件分别表示如下。

（1）$AB\bigcup AC\bigcup BC$ 或 $ABC\bigcup AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC$；

（2）$\overline{A}\bigcup\overline{B}\bigcup\overline{C}$ 或 $AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC\bigcup A\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}B\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}C\bigcup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（3）$\overline{A}\overline{B}\bigcup\overline{A}\overline{C}\bigcup\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\bigcup A\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}B\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}C$。

招数 3.3.1 妙招：如果要求的是若干事件中“至少”有一个发生，可用事件的并表示，这种表示法较方便，但在计算上不是很方便，用得较少。

例 3.3.3（难度系数 0.6，1997 年考研数学三真题） 设 A、B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}\bigcup B)(A\bigcup B)(\overline{A}\bigcup\overline{B})(A\bigcup\overline{B})\}=$______。

解析：该题主要考查事件之间的运算关系和运算律。应先将事件化简，然后再求概率，这类题型数学一出现得较少，数学三相对较多。

解：因为

$$(\overline{A}\bigcup B)(A\bigcup B)=\overline{A}A\bigcup\overline{A}B\bigcup BA\bigcup BB=\varnothing\bigcup(\overline{A}\bigcup A)B\bigcup B=B,$$

且

$$(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=\overline{A}A\cup\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}A\cup\overline{B}\,\overline{B}=\varnothing\cup(\overline{A}\cup A)\overline{B}\cup\overline{B}=\overline{B},$$

所以 $(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing$，故原式等于 0。

例 3.3.4（难度系数 0.6，2009 年考研数学三真题） 设事件 A、B 互不相容，则______。

（A） $P(\overline{AB})=0$　　　　（B） $P(AB)=P(A)P(B)$

（C） $P(A)=1-P(B)$　　　　（D） $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

解析：本题考查事件之间的关系与运算律，注意积事件对应集合的交集。

因为 A、B 互不相容，所以 $P(AB)=0$，即 $P(\overline{AB})=1$，故排除（A）；因为当 $P(A)$、$P(B)$ 均不为 0 时，$0=P(AB)\neq P(A)P(B)$，故排除（B）；$P(A)=1-P(B)$ 只有当 A、B 互为对立事件的时候才成立，但条件为 A、B 互不相容，它们未必为对立事件，故排除（C）。由于 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1$，故选择（D）。

解：（D）。

招数 3.3.2　险招：针对选择题型，可用推证法找出正确结论，也可用排除法排除不正确结论，但最稳妥的做法是两者结合使用。

知识点 4　概率的概念与性质

更多资源请扫二维码:

4.1　概念、结论

1．概念

定义 4.1.1 概率的统计定义　在相同条件下，进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数，$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率；当重复试验的次数 n 逐渐增大时，事件 A 的频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 呈现出稳定性，即频率 $f_n(A)$ 总是在某个常数 p 附近摆动，而逐渐稳定于 p，则称 p 为事件 A 的概率。

定义 4.1.2　概率的公理化定义　设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，对 E 中每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$，若满足下列三个条件：（1）非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；（2）规范性：$P(\Omega)=1$；（3）可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$，有 $P(A_1+A_2+A_3+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots$ 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

2. 结论

结论 4.1.1 不可能事件$\varnothing$的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件Ω的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

结论 4.1.2 有限可加性 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为两两互不相容事件，则$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$。

结论 4.1.3 加法公式 设A、B为任意两个随机事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \text{。}$$

计算$P(A \cup B)$ 时有多种方法，比如

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(\overline{A}B) \\ &= P(B) + P(A\overline{B}) = P(AB) + P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) \text{。} \end{aligned}$$

一般地，如果要求的是若干事件中“至少”有一个发生的概率，则应联系到概率的加法公式；当事件之间相互独立时，则用对立事件的概率公式$P(A) = 1 - P(\overline{A})$计算简便。

结论 4.1.4 减法公式 设A、B为任意两个事件，则$P(B - A) = P(B) - P(AB)$。特别地，若$A \subset B$，则$P(B - A) = P(B) - P(A)$；当$A \subset B$时，$P(A) \leqslant P(B)$。

结论 4.1.5 设A为任意随机事件，则$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$。

结论 4.1.6 设A、B、C为任意三个事件，则：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \text{。}$$

4.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 5，知识点 6，知识点 8
- **主要题型**：利用概率性质判别或计算事件的概率。
- **综述**：概率是整个概率论的核心概念，定义 4.1.2 是其公理化定义，它给出了概率的三个基本性质，均可直接用于概率的计算。对于特殊的事件如不可能事件、相容事件等，一般通过概率的概念及性质进行判断。对于一般事件，常常利用事件的关系、事件的运算律和概率的性质进行计算。

4.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 1.3.4 例 7.3.4

例 4.3.1 （难度系数 0.4） 设A、B、C是三个事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = \dfrac{1}{8}$，求$A$、$B$、$C$至少有一个发生的概率。

解析：一般来说，求至少一个事件发生的概率时，应考虑用加法公式，但有时也可利用对立事件的概率来求解事件的概率。

解： 首先有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$。因为 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$，于是 $P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$。

招数 4.3.1 绝招：如果要求的是若干事件中“至少”有一个发生的概率，则应马上联想到概率加法公式。

例 4.3.2（难度系数 0.6） 设 $P(A)+P(B)=0.9$，$P(A\cup B)=0.5$，则 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=$________。

解析： 借助文氏图可找到事件之间的关系，再利用概率公式计算。

解： 由文氏图可以看出，$P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(AB)$。

由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.9-0.5=0.4$，故

$$P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(AB)=0.5-0.4=0.1。$$

例 4.3.3（难度系数 0.8） 证明：对任意事件 A、B，有 $|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$。

解析： 此题主要考查概率的性质及运算，但其中需应用均值不等式 $4ab\leqslant(a+b)^2$。

解： 根据 $4ab\leqslant(a+b)^2$，则 $P(A)P(\overline{A})\leqslant\frac{[P(A)+P(\overline{A})]^2}{4}=\frac{1}{4}$。

不妨设 $P(A)\geqslant P(B)$，则一方面有：

$$P(AB)-P(A)P(B)\leqslant P(B)-P(B)P(B)=P(B)[1-P(B)]\leqslant\frac{1}{4}；$$

另一方面：
$$\begin{aligned}P(A)P(B)-P(AB)&=P(A)[P(AB)+P(\overline{A}B)]-P(AB)\\&=P(A)P(\overline{A}B)+P(AB)[P(A)-1]\leqslant P(A)P(\overline{A}B)\\&\leqslant P(A)P(\overline{A})\leqslant\frac{1}{4}。\end{aligned}$$

综合上述可知 $|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$。

例 4.3.4（难度系数 0.6，2015 年考研数学一真题） 若 A、B 为任意两个随机事件，则（　　）。

（A）$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　（B）$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$　　（D）$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$

解析： 利用概率的基本性质进行推证可得正确结果，对不成立的结果，可用反例说明。在概率题目的反例中，因为均匀分布简单，所以常借助服从均匀分布表示的事件来说明问题。

（1）假设随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，若 $A=B=\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{3}\right\}$，则 $P(AB)=\frac{1}{3}>P(A)P(B)$，（A）不成立；（2）设 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，若

$A=\left\{0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right\}$，$B=\left\{\frac{2}{3} \leqslant X \leqslant 1\right\}$，则 $P(AB)=0<P(A)P(B)$，（B）不成立，同时（D）也不成立；（3）由于 $AB \subset A, AB \subset B$，按概率的基本性质，有 $P(AB) \leqslant P(A)$ 且 $P(AB) \leqslant P(B)$，从而 $P(AB) \leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2}$，（C）成立。故选（C）。

解：（C）。

例 4.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 7，2011 年考研数学一真题） 设随机事件 A、B 满足 $A \subset B$ 且 $0<P(A)<1$，则必有（　）。

（A）$P(A) \geqslant P(A|A \cup B)$　　（B）$P(A) \leqslant P(A|A \cup B)$

（C）$P(B) \geqslant P(B|A)$　　（D）$P(B) \leqslant P(B|\bar{A})$

解析：根据事件的关系得事件的概率关系，再利用概率定义及公式通过运算产生结果。

因为 $A \subset B$，$0<P(A)<1$，有 $0<P(A) \leqslant P(B) \leqslant 1$，$A \cup B=B, AB=A$，故：

（1）$P(A|A \cup B)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A)$，（A）不成立；

（2）条件概率 $P(A|A \cup B)$ 中，样本空间缩小了，所以概率变大了，（B）成立；

（3）$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1 \geqslant P(B)$，（C）不成立；

（4）$P(B \mid \bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(A)}{1-P(A)} \leqslant P(B)$，（D）不成立；

故选（B）。

解：（B）。

知识点 5　古典概型

更多资源请扫二维码:

5.1　概念、定理及结论

1. 概念

定义 5.1.1 古典概型（等可能概型） 若随机试验 E 有下面两个特点：（1）试验的样本空间只包含有限个元素；（2）试验中每一个基本事件发生的可能性相同，则称此类试验模型为古典概型。

2．定理

定理 5.1.1　在古典概型中，若 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；则 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$；设任一事件 A 是由 m 个基本事件构成的，则有 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{A\text{中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$。

定理 5.1.2　加法原理（分类处理）　某件事由两类方法来完成，第一类方法可由 m 种方法完成，第二类方法可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m+n$ 种方法来完成。

定理 5.1.3　乘法原理（分步骤处理）　某件事由两个步骤来完成，第一个步骤可由 m 种方法完成，第二个步骤可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m\times n$ 种方法来完成。

3．结论

结论 5.1.1　计算古典概型中的事件概率，一是确定所讨论问题的样本空间，二是正确计算事件 A 所包含的样本点个数。

结论 5.1.2　古典概型问题的主要计算方法：涉及分类时用加法原理，涉及分步时用乘法原理，需要考虑顺序时用排列，不需要考虑顺序时则用组合。

结论 5.1.3　常犯的错误是计算样本点数时漏算和多算。

结论 5.1.4　注意排列中要区分以下几种类型：（1）全排列：$P_n=n!=n(n-1)\cdots1$；（2）允许重复的排列：$N=n\times n\times\cdots\times n=n^k$；（3）不全相同元素的全排列：$N=\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$。

结论 5.1.5　常用排列组合公式：

（1）$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$；（2）$C_n^m=C_n^{n-m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$；（3）$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$。

5.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 1，知识点 4
- **主要题型**：古典概率的计算。
- **综述**：首先根据样本点是否有限及每个样本点是否发生等可能，来判断所处理的问题是否为古典概型；其次判断是否可将问题归于已知的几种古典概型问题，如抽样问题、质点入盒问题、随机取数问题等；若不能转化为已知模型，则据定理 5.1.1 分别计算样本点总数和事件的样本点数，计算时既要注意排列组合及加法或乘法原理的正确运用，还要注意在计算事件与样本空间包含的样本点数时，分类的标准必须相同，比如样本空间用的是排列，事件就应该用排列而不能用组合。

5.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 9.3.3 例 14.3.2

例 5.3.1 （难度系数 0.6） 将 3 个乒乓球随机地放入 3 个杯子中去，求杯中乒乓球的最大个数分别为 1、2、3 的概率。

解析：计算古典概型的关键在于计算样本点的总数和事件 A 所包含的样本点个数，计算时一定要先清楚问题或试验过程，然后作缜密的分解才能得出正确结果，计算样本点个数时，既不能多算也不能少算。

解：设 A_i $(i=1, 2, 3)$ 表示杯中乒乓球的最大个数。

将 3 个乒乓球随机放入 3 个杯子中，全部可能的放法有 3^3 种，杯中球的最大个数只可能为 1、2、3 三种情况中的一种；杯中球的最大个数为 1 时，每个杯中最多放一球，故 $P(A_1)=\dfrac{3!}{3^3}=\dfrac{2}{9}$；杯中球的最大个数为 3，即三个球全放入一个杯中，故 $P(A_3)=\dfrac{C_3^1}{3^3}=\dfrac{1}{9}$；因此 $P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=\dfrac{2}{3}$ 或 $P(A_2)=\dfrac{C_3^1C_2^1C_3^2}{3^3}=\dfrac{2}{3}$。

例 5.3.2 （难度系数 0.6） 袋中装有 n 个乒乓球，其中红球 r 个，白球 $n-r$ 个，每人依次随机从中各取 1 个球，取后不放回，则第 k $(k\leqslant n)$ 个人取到红球的概率为______。

解析：该问题属于抽样问题模型，解决的关键在于对事件的合理分析及理解，在此基础上再通过公式运算可得结果，而且该问题说明了抽签原理：在抽签中先抽与后抽的概率相同。

解：设 A_i 表示“第 i 个人取到红球”，观察前 k 个人取球的情形，每种取法是一个样本点，据乘法原理，样本点总数为 P_n^k，其中第 k 个人取到红球的样本点数可假设为从 r 个红球中抽一个红球给第 k 个人，其余 $n-1$ 人抽剩下的 $r-1$ 个红球，故样本点数为 rP_{n-1}^{k-1}，则 $P(A_k)=\dfrac{rP_{n-1}^{k-1}}{P_n^k}=\dfrac{r}{n}$。

例 5.3.3 （难度系数 0.6） 教室里有 5 个人，求至少两个人的生日在同一个月的概率。

解析：该问题属于质点入盒问题模型，利用该模型对应的方法可计算概率。

解：设 B 表示‘至少有两个人的生日在同一个月’，由于事件 B 的分解较复杂，且对立事件 $\overline{B}$ 的分解较简单，故通过求对立事件 $\overline{B}$ 的概率进行计算：

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{P_{12}^5}{12^5}=\frac{89}{144}。$$

招数 5.3.1 奇招：当复杂事件 A 的概率较难求解时，可尝试通过 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 求其对立事件的概率进行求解，这是因为其对立事件的表示法有时候比较简单。

例 5.3.4（难度系数 0.6）把 n 个男人和 n 个女人随机排列一排，求没有两个女人排在一起的概率。

解析：在处理排列组合问题中，经常会运用以下方法：限制条件捆绑法、相同问题插空法、特殊位置（元素）优先法、元素列举法（当元素数目不多时）、选排问题先取再排法等等，此题运用了相同问题插空法。

解：考虑 n 个女人的排法，$2n$ 个位置上女人占有 n 个位置，故共有 C_{2n}^{n} 种排法，而没有两个女人在一起，意味着在 n 个男人及两侧共 $n+1$ 个位置供 n 个女人排列，共有 C_{n+1}^{n} 种排法， 故所求事件的概率为 $p=\dfrac{C_{n+1}^{n}}{C_{2n}^{n}}=\dfrac{n+1}{C_{2n}^{n}}$。

例 5.3.5（难度系数 1.0）巴拿赫（Banach）火柴盒问题：某数学家有甲、乙两盒火柴，每盒有 n 根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取一根。试求：（1）他首次发现一盒已空时另一盒恰有 r 根的概率是多少？（2）第一次用完一盒火柴时（不是发现空）而另一盒恰有 r 根的概率又是多少？

解析：该问题涉及一个著名的数学模型，求解的关键在于首先要清楚发现火柴盒已空与取完最后一根火柴的区别；其次要清楚在此动作完成之前所发生的事情。

解：以 B_1、B_2 分别记火柴取自甲、乙两盒的事件，则有 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$。

（1）发现一盒已空，另一盒恰剩 r 根，说明已取了 $2n\!-\!r$ 次，设第 n 次取自甲盒（已空），后 $n\!-\!r$ 次取自乙盒，第 $2n\!-\!r\!+\!1$ 次拿起甲，发现已空；把取 $2n\!-\!r$ 次火柴视作 $2n\!-\!r$ 重伯努利试验，再注意到 B_1 与 B_2 的对称性（即甲盒与乙盒都可能已空），故所求概率为 $P_1=2C_{2n-r}^{n}(\dfrac{1}{2})^{n}(\dfrac{1}{2})^{n-r}\dfrac{1}{2}=C_{2n-r}^{n}\dfrac{1}{2^{2n-r}}$。

（2）前 $2n\!-\!r\!-\!1$ 次取火柴，有 $n\!-\!1$ 次取自 B_1 盒，$n\!-\!r$ 次取自 B_2 盒，第 $2n\!-\!r$ 次取自 B_1 盒，故同上可求概率为 $P_2=2C_{2n-r-1}^{n-1}(\dfrac{1}{2})^{n-1}(\dfrac{1}{2})^{n-r}\dfrac{1}{2}=C_{2n-r-1}^{n-1}\dfrac{1}{2^{2n-r-1}}$。

例 5.3.6（难度系数 0.8，跨知识点 16）将一枚均匀硬币掷 $2n$ 次，求出现正面次数多于反面次数的概率。

解析：复杂事件的概率不能简单地套用公式进行计算，而应对问题进行综合分析，找出解决问题的方法。

解：掷 $2n$ 次硬币，可能出现：A={正面次数多于反面次数}，B={正面次数少于反面次数}，C={正面次数等于反面次数}，显然 A、B、C 是两两互不相容事件；由于硬币正反面出现的可能性相同，故 $P(A)=P(B)$；而且 $P(A)+P(B)+P(C)=1$，所以 $P(A)=\dfrac{1-P(C)}{2}$；对事件 C，由 $2n$ 重伯努利试验中正面出现 n 次的概率知 $P(C)=C_{2n}^{n}(\dfrac{1}{2})^{n}(\dfrac{1}{2})^{n}$。故 $P(A)=\dfrac{1}{2}[1-C_{2n}^{n}\dfrac{1}{2^{2n}}]$。

招数 5.3.2 奇招：将事件符号化，是表示事件以及理顺事件之间的关系的基础，最终有利于进行数学计算。

知识点 6　几何概型

更多资源请扫二维码:

6.1　概念、结论

1．概念

定义 6.1.1 几何概型　若样本空间 Ω 为一有界区域（线段、平面区域、空间区域），且区域中每个样本点是等可能的，则样本点落在 Ω 的任一子集 A 内的概率 $P(A)=\dfrac{s_{\mathrm{A}}}{s}$，其中 s 为 Ω 的度量（长度、面积、体积），s_{A} 为 A 的度量。

2．结论

结论 6.1.1　几何概型试验中：（1）其样本空间中样本点的个数为无限不可数；（2）每个样本点出现的可能性相同。

结论 6.1.2　几何概型的概率是借助几何度量来计算事件的概率，最好的处理方法是画出相关问题的几何图形以帮助求解。

结论 6.1.3　几何概型问题的主要计算方法为：几何方法、微积分方法。

结论 6.1.4　几何概型与古典概型均为等可能概型，但前者样本空间中样本点数无限或不可数，后者样本空间中样本点数有限。

6.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 1，知识点 4
- **主要题型**：几何概型的概率计算。
- **综述**：首先根据样本点是否无限及每个样本点是否等可能，判断所处理的问题是否是几何概型，若是几何概型，则将问题转化为几何图形来分析；其次判断是否可将问题归于常见的几何概型问题，如会面问题、候车问题等；若不能转化为已知模型，则分别计算样本空间及事件的测度，从而计算出事件的概率，计算时常利用几何或微积分的相关方法。

6.3　经典例题精解巧析

例 6.3.1（难度系数 0.6）某地铁每隔 6 min 有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每一个乘客到站等车时间不多于 2 min 的概率。

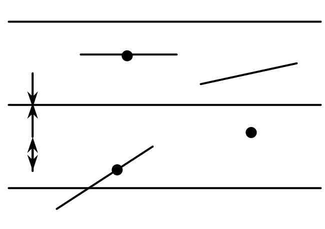
解析： 该问题属于“候车问题”，此类题目属于一维几何概率问题，处理的关键在于用区间表示事件。

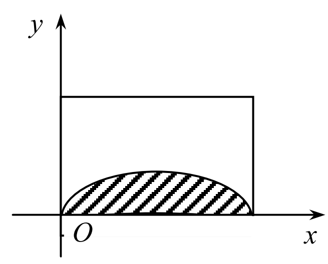
解： 设 A＝{每一个乘客等车时间不多于 2 分钟}。由于乘客到达和地铁到达均是随机的，故此问题的样本空间可认为是一个区间 $S=[0,6)$，其区间长度为 6；事件 A 发生意味着乘客等车时间不超过 2 分钟，故 A 发生的区间长度为 $s_{\mathrm{A}}=2$。因此 $P(A)=\dfrac{s_{\mathrm{A}}}{s}=\dfrac{1}{3}$。

例 6.3.2（难度系数 0.8）在平面上画出等距离 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随机地投掷一根长 $l(l<a)$ 的针，求针与任一平行线相交的概率。

解析： 这是一个著名的数学问题——“蒲丰投针问题”，解题的关键在于通过引进变量，给出问题的数学表达式，利用数学表达式画出讨论问题的几何图形，通过几何图形进行概率计算。

解： 设 A 为“针与某平行线相交”，针落在平面上的情况为平行、相交、不相交也不平行三种情况；设 x 为针的中点到最近的一条平行线的距离，φ 为针与平行线的夹角，则样本空间 $S=\left\{0<x<\dfrac{a}{2},\ 0<\varphi<\pi\right\}$； A 发生 $\Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{L}{2}\sin\varphi$，如下图所示。





故 $P(A)=\dfrac{1}{\dfrac{a}{2}\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{L}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2L}{a\pi}$。

例 6.3.3（难度系数 0.6）两人约定上午 9∶00~10∶00 在公园会面，若一人到达，等待 30min 后另一人还未到达，则会面取消，求两人会面的概率。

解析： 该问题属于“会面问题”，该类问题是二维几何概率问题。解决的方法类似例 6.3.2。

解： 设两人到达的时间分别为 x、y，则 $x\in[9,10]$， $y\in[9,10]$；样本空间 $S=\{(x,y)\,|\,9<x<10,\ 9<y<10\}$；两人会面，说明该事件为

$$A=\{(x,y)\,|\,|x-y|<\frac{30}{60},\quad 9<x<10,\quad 9<y<10\}。$$

根据几何知识易知 S 的面积为 1，A 的面积为 $\frac{3}{4}$。故他们会面的概率为 $P=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{3}{4}$。

例 6.3.4 （难度系数 0.6） 已知一组抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+1$，其中 a 为 2、4、6、8 中任取的一个数，b 为 1、3、5、7 中任取的一个数，从这些抛物线中任意抽取两条，它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是（　　）。

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{7}{60}$　　（C）$\frac{6}{25}$　　（D）$\frac{5}{16}$

解析：该问题表面看是几何概型问题，但实际上是一个古典概型问题，考查曲线抛物线的切线概念及相应古典概型的计算。

解：这一组抛物线共 $4\times4=16$ 条，从中任意抽取两条，共有 $C_{16}^2=120$ 种不同的取法；它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=a+b$。若 $a+b=5$，有两种情形，从中取出两条，有 C_2^2 种取法；若 $a+b=7$，有三种情形，从中取出两条，有 C_3^2 种取法；若 $a+b=9$，有四种情形，从中取出两条，有 C_4^2 种取法；若 $a+b=11$，有三种情形，从中取出两条，有 C_3^2 种取法；若 $a+b=13$，有两种情形，从中取出两条，有 C_2^2 种取法。由分类计数原理知任取两条切线平行的情形共有 $C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_3^2+C_2^2=14$ 种，故所求概率为 $\frac{7}{60}$。

例 6.3.5 （难度系数 0.6，2006 年考研数学一、三真题） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0，3]上的均匀分布，求 $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}$。

解析：该题可用二维均匀分布进行处理，也可转化为几何概型进行处理。

解法 1　设 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 3,\quad 0\leqslant y\leqslant 3\}$，则由几何概型可知

$$P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=\frac{1}{S_{\mathrm{D}}}=\frac{1}{9}。$$

解法 2　由题设可知 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0，3]上的均匀分布，故

$$P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,\ Y\leqslant 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{9}。$$

知识点 7　条件概率

更多资源请扫二维码:

7.1　概念、定理及结论

1. 概念

定义 7.1.1　条件概率　设 A、B 是两个随机事件，称 $P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

2. 定理

定理 7.1.1　乘法定理　对于任意两个事件 A、B，且 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)\text{。}$$

定理 7.1.2　对于任意三个事件 A、B、C，若 $P(A)>0$，$P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)\text{。}$$

定理 7.1.3　条件概率符合概率公理化的三个性质：（1）$P(B \mid A)\geqslant 0$；（2）$P(S \mid A)=1$；（3）如果事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 互不相容，那么 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i \mid A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i \mid A)$。

3. 结论

结论 7.1.1　条件概率计算的常用方法：

（1）利用条件概率的定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 来计算概率，其中 $P(A)>0$；

（2）通过缩小样本空间（考虑事件 A 发生的条件下的样本空间）计算概率。

结论 7.1.2　要注意区分条件概率与积事件概率：$P(AB)$ 与 $P(B \mid A)$ 表示的是不同事件的概率，区分的主要依据在于前提不同，$P(AB)$ 表示没有任何已知条件的前提下，A 与 B 均发生的概率，$P(B \mid A)$ 同样是 A 与 B 均发生，但它表示的是在已知 A 发生的前提下，B 发生的概率。

结论 7.1.3　$P(B)$ 与 $P(B \mid A)$，$P(A)$ 与 $P(B \mid A)$ 均是表示不同事件的概率，两对概率中的概率值大小没有必然的可比较性。

7.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 1，知识点 4
- **主要题型**：条件概率的计算。
- **综述**：应用题中可根据题意来判断是求无条件概率还是条件概率，条件概率的计算一般有公式法或缩减样本空间法两种，缩减样本空间法要先清楚该条件的发生对样本空间的影响，然后再在缩减后的样本空间上进行求解；乘法公式一方面用于求解多个依时间顺序的事件都发生的概率，另一方面也用于求解一个事件可分解为几个分过程的概率。

7.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 4.3.5，例 11.3.5

例 7.3.1（难度系数 0.4） 设 A、B 为两事件，且 $A \subset B$，$P(B) > 0$，则必有（　　）。

（A）$P(A) < P(A|B)$　　　　（B）$P(A) \leqslant P(A|B)$

（C）$P(A) > P(A|B)$　　　　（D）$P(A) \geqslant P(A|B)$

解析：本题考查条件概率的概念、计算公式及概率的性质。

由于 $A \subset B$，$P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A)$；故选择（B）。

解：（B）。

例 7.3.2（难度系数 0.6） n个人抓一个有物之阄，求第一个人和第二个人抓到阄的概率。

解析：这是“抓阄问题”。抓阄问题是一个著名的数学问题，研究表明无论是先抓还是后抓，抓中的概率均相同；解题中先将事件符号化，再将问题转化为可利用乘法定理计算的问题。

解：设 $A_i = \{第i个人抓到阄\}$，$i = 1,2,\cdots,n$。则 $P(A_1) = \dfrac{1}{n}$，$P(\overline{A_1}) = \dfrac{n-1}{n}$，$P(A_2 \mid \overline{A_1}) = \dfrac{1}{n-1}$；第二个人抓到阄意味着是在第一人没有抓到阄的条件下，故

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}。$$

注：计算可知 $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$，$i = 1,2,\cdots,n$；说明无论先抓还是后抓，抓中的概率相同。

例 7.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 8） 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回），试求在先取的零件是一等品

的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率。

解析： 本题考查全概率公式、条件概率及古典概率的计算。解题的关键在于理清各个事件之间的联系。

解： 设 A_i 表示“第 i 次取出的零件是一等品”，$i=1,2$，B_i 表示“取到第 i 箱”，$i=1,2$；

则 $P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}+\frac{3}{5})=\frac{2}{5}$，故

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1A_2B_1+A_1A_2B_2)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}\right]}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{9}{49}+\frac{51}{29}}{4}=0.4856\text{。}$$

例 7.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 4） 设 $P(B)>0$，A_1、A_2 互相不容，则下列各式中不一定正确的是（　）。

（A） $P(A_1A_2|B)=0$　　　　（B） $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

（C） $P(\overline{A}_1\overline{A}_2|B)=1$　　　　（D） $P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2|B)=1$

解析： 本题考查条件概率及概率的运算；事件的运算律及概率公式是进行概率计算的基础。

因为 A_1、A_2 互不相容，所以 $P(A_1A_2)=0$。

（1） $P(A_1A_2|B)=\frac{P(A_1A_2B)}{P(B)}=0$，（A）正确；

（2） $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

$=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，（B）正确；

（3） $P(\overline{A}_1\overline{A}_2|B)=P(\overline{A_1\cup A_2}|B)=1-P(A_1\cup A_2|B)$

$=1-P(A_1|B)-P(A_2|B)\neq 1$，（C）错误；

（4） $P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2|B)=P(\overline{A_1A_2}|B)=1-P(A_1A_2|B)=1-0=1$，（D）正确。

故选择（C）。

解：（C）

例 7.3.5 （难度系数 0.6，跨知识点 10） 一个家庭中有两个小孩，（1）如果已知老大是女孩，则老二也是女孩的概率为多大？（2）如果已知其中有一个女孩，则另一个也是女孩的概率是多大？

解析： 根据题意可假设各胎生男与生女是相互独立的且可能性相同。第一问中若注意到事件的独立性，则问题比较容易解决；第二问看起来好像与第一问相同，但实际上有区别。第二问的条件应理解为至少有一个是女孩。

解： 记 $A_1=\{老大是女孩\}$，记 $A_2=\{老二是女孩\}$，则 A_1 和 A_2 相互独立，且 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$。

（1）于是 $P(A_2\mid A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$，即已知老大是女孩的前提下，老二也是女孩的概率为 $\dfrac{1}{2}$。

（2）事件发生的条件是“两个孩子至少有一个是女孩”，相应所求事件就可以表述为“两个孩子均为女孩”，问题于是归结为求 $P[A_1A_2\mid(A_1\cup A_2)]$，由于

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，于是 $P[A_1A_2\mid(A_1\cup A_2)]=\dfrac{1/4}{3/4}=\dfrac{1}{3}$，即已知其中有一个是女孩的条件下，另一个也是女孩的概率为 $\dfrac{1}{3}$。

知识点 8　全概率公式

更多资源请扫二维码:

8.1　概念、结论

1．概念

定义 8.1.1 样本空间的划分　设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若（1）$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中两两互不相容；（2）$B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$，则称事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分。

定义 8.1.2　全概率公式　设试验 E 的样本空间为 Ω，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，则对任一事件 B，有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$。

2．结论

结论 8.1.1　若某事件是伴随着一个划分的发生而发生的，则应联想到全概率公式。全概率公式在概率计算中是十分重要的，它利用样本空间 Ω 的一个划分 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 将事件 B 分解为 n 个互斥事件 $A_1B,A_2B,\cdots,A_nB$ 之和，然后联合加法公式和乘法公式计算事件 B 的概率。

结论 8.1.2　运用全概率公式计算事件的概率的关键是构造样本空间 Ω 的一个划分，常用的样本空间 Ω 的划分有：（1）A 与 $\overline{A}$；（2）离散随机变量 X 取遍一切可能值 $\{X=x_i\}(i=1,2,\cdots)$；（3）伴随事件 B 发生的一切可能的情形 $A_i(i=1,2,\cdots)$。

结论 8.1.3　对随机试验来说，若所讨论的随机试验是分两个阶段实施的，且前一阶段的结果具有不确定性，且两个阶段存在逻辑上的因果关系，求下一阶段出现事件的概率，则必须用全概率公式，其中样本空间 Ω 的划分一般是通过分析产生该结果的原因，即前阶段所有结果的可能性。

8.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 7，知识点 9
- **主要题型**：事件概率的计算。
- **综述**：全概率公式针对的是相对复杂的事件的概率，该事件是由若干个不同的原因引起的，即通常所说的“由原因求结果”。具体做法：先了解事件发生的全过程，分解出导致事件发生的各种可能的情况，这些可能的情况构成了样本空间的划分，再利用数学符号表示各种情况及相应的概率，最后利用全概率公式进行计算。

8.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 15.3.4，　例 17.3.4

例 8.3.1（难度系数 0.4）　已知甲、乙两箱中有同种产品，其中甲箱中有 2 件正品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件正品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品为次品的概率。

解析：全概率公式应用的关键在于确定划分，划分的主要依据是从甲箱中取出的次品的数量情况，确定划分后，再利用全概率公式处理。

解：设 A_i 表示“第一次从甲箱中任取 3 件，其中恰有 i 件次品”（i=1，2，3），

设 B 表示“第二次从乙箱任取一件为次品”的事件，则依题可知：

$$P(A_1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}，\ P(A_2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}，\ P(A_3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}。$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{6}，\ P(B\mid A_2)=\frac{2}{6}，\ P(B\mid A_3)=\frac{3}{6}，$$

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=0.3。$$

招数 8.3.1　绝招：若某事件是伴随着一个划分的发生而发生的，则应马上联想到该事件的发生概率应该用全概率公式计算，其中的关键是：确定划分。

例 8.3.2（难度系数 0.6）　从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________。

解析： 本题考查全概率公式的应用，但解决本题的关键问题在于借助随机变量表示事件。

解：
$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1\}P\left\{Y=2\middle|X=1\right\}+P\{X=2\}P\left\{Y=2\middle|X=2\right\}\\&\quad+P\{X=3\}P\left\{Y=2\middle|X=3\right\}+P\{X=4\}P\left\{Y=2\middle|X=4\right\}\\&=\frac{1}{4}\times0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}。\end{aligned}$$

例 8.3.3 （难度系数 0.8，跨知识点 16） 若干箱子中装有同种类的 10 件产品，每一箱的次品数从 0 到 2 是等可能的，开箱检验时，从中任取一件，如果检验结果为次品，则认为该箱产品不合格而拒收。由于检验误差，一件正品被误判为次品的概率为 2%，一件次品被误判为正品的概率为 10%。求：（1）检验一箱产品能通过验收的概率；（2）检验 10 箱产品通过率不低于 90%的概率。

解析： 根据题意先合理假设各事件，再根据题目条件及所要解决的问题进行求解。注意：若某事件是伴随着某种划分的发生而发生的，则应首先考虑全概率公式或贝叶斯公式。

解：（1）设 $A_i=\{$一箱内有 i 件次品$\}$，i=0，1，2，显然事件 A_0、A_1、A_2 构成一组划分，设事件 B=“一箱产品通过验收”，C=“抽到一件正品”，欲求 $P(B)$。依题意，可得

$$P(A_i)=\frac{1}{3}；\quad P(C\mid A_i)=\frac{10-i}{10}，\quad(i=0,1,2)；\quad P(B\mid C)=0.98；\quad P(B\mid\overline{C})=0.10。$$

据全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A_0)P(C\mid A_0)+P(A_1)P(C\mid A_1)+P(A_2)P(C\mid A_2)\\&=\frac{1}{3}(\frac{10}{10}+\frac{9}{10}+\frac{8}{10})=0.9,\\P(\overline{C})&=1-P(C)=1-0.9=0.1。\end{aligned}$$

再次运用全概率公式，可得

$$P(B)=P(C)P(B\mid C)+P(\overline{C})P(B\mid\overline{C})=0.9\times0.98+0.1\times0.1=0.892。$$

（2）设 X 表示“通过验收的箱数”，则 $X\sim b(10,p)$，其中 $p=P(B)=0.892$，于是

$$\begin{aligned}P\left\{\frac{X}{10}\geqslant0.9\right\}&=P\{X\geqslant9\}=P\{X=9\}+P\{X=10\}\\&=C_{10}^{9}0.892^{9}\cdot0.108+0.892^{10}=0.705。\end{aligned}$$

例 8.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 16） 在一天中进入某超市的顾客人数服从参数为 λ 的泊松分布，而进入超市的每一个人购买 A 种商品的概率为 p，若顾客购买商品是相互独立的，求一天中恰有 k 个顾客购买 A 种商品的概率。

解析： 本题考查全概率公式的应用，但本题的难点是事件的划分可能是无限可列多个。

解： 设 $B=\{$一天中恰有 k 个顾客购买 A 种商品$\}$，$k=0,1,2,\cdots$

$C_n=\{$一天中有 n 个顾客进入超市$\}$，$n=k,k+1,\cdots$

则

$$P\left(C_n\right)=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad P\left(B \mid C_n\right)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k};$$

则

$$\begin{aligned}P(B)=\sum_{n=k}^{\infty}P(C_nB)=\sum_{n=k}^{\infty}P(C_n)P(B\mid C_n) & =\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\\ & =\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p},\quad k=0,\ 1,\ \cdots\end{aligned}$$

例 8.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 14，2003 年考研数学一真题）　已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：（1）乙箱中次品件数 X 的数学期望；（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

解析：本题考查离散型随机变量的概念及全概率公式的应用。

解：（1）X 的可能取值为 0，1，2，3，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_3^kC_3^{3-k}/C_6^3,\quad k=0,1,2,3$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此 $E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$。

（2）设 A 表示事件“从乙箱中任意取出的一件产品是次品”，根据全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A\mid X=k\}=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}。$$

知识点 9　贝叶斯公式（数学一、数学三）

更多资源请扫二维码:

9.1　概念、结论

1．概念

定义 9.1.1　贝叶斯公式（逆概率公式）　设试验 E 的样本空间为 Ω，B 为 E 的事件，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(B)>0$，则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},\quad (i=1,2,\cdots,n)。$$

特别地，当 $n=2$ 时有 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}$。

2．结论

结论 9.1.1 利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率的关键是确定满足条件的划分 $A_1,A_2,\cdots,A_n$；事件 $\boldsymbol{B}$ 必须伴随着 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之一发生，B 的概率就可用全概率公式计算。

结论 9.1.2 对随机试验来说，若所讨论的随机试验是分阶段实施的，前一阶段的结果具有不确定性，且两个阶段存在逻辑上的因果关系，但下一阶段某事件已经出现，求此事件是由前一阶段的某结果所引起的概率，则应使用贝叶斯公式，即通常所说的“由结果找原因”。

结论 9.1.3 一般将导致试验结果的各种“原因” $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的概率 $P(A_i)$ 称为“先验概率”，它反映了各种“原因”发生的可能性大小，是根据以往的经验在试验前已经知道概率；若在试验中出现事件 B，将有助于探讨事件发生的“原因”，条件概率 $P(A_i|B)$ 称为“后验概率”，它反映经过试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的重新判断，贝叶斯公式表明后验概率 $P(A_i|B)$ 为 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$ 中第 i 项 $P(A_i)P(B|A_i)$ 在总和中所占的比例。

9.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 7，知识点 8
- **主要题型**：利用贝叶斯公式计算概率。
- **综述**：已知某种结果已经发生，要求此结果是由某种原因导致而发生的事件概率，常常采用贝叶斯公式求解，即“由果导因”。将所讨论的问题分成两个阶段，第一阶段的试验结果是不确定的，但第二阶段的某结果是确定的，求该结果是由第一阶段某结果所引起的事件的概率，这类问题一般可用贝叶斯公式解决。特别注意贝叶斯公式是由条件概率公式与全概率公式合成的。

9.3 经典例题精解巧析

例 9.3.1（难度系数 0.2） 某地 7 月下暴雨的概率为 0.4，当下暴雨时，有水灾的概率为 0.2；当不下暴雨时，有水灾的概率为 0.05，求：（1）该地 7 月份有水灾的概率；（2）当该地 7 月份已发生水灾时，下暴雨的概率。

解析： 本题考查条件概率，解题的关键在于将事件符号化。事件符号化既有利于将条件用数学式表示出来，又有利于应用各类数学公式。

解： 用 B 表示该地 7 月有水灾，A 表示该地 7 月下暴雨，则依题知：$P(A)=0.4$，$P(\overline{A})=0.6$；$P(B\mid A)=0.2$，$P(B\mid \overline{A})=0.05$。

则：（1）$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=0.11$；

（2）$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{8}{11}$。

例 9.3.2（难度系数 0.6）甲盒中有 2 个白球和 3 个黑球，乙盒中有 3 个白球和 2 个黑球，今从每个盒中各取 2 个球，发现它们是同一颜色的，则这种颜色是黑色的概率为__________。

解析： 本题主要考查条件概率的计算方法，可采用事件符号化处理。

解： 设 $A=\{4$ 个球是同一颜色的$\}$，$B_1=\{4$ 个球都是白球$\}$，$B_2=\{4$ 个球都是黑球$\}$，则 $A=B_1\cup B_2$，且 $AB_2=B_2$；$P(B_1)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{100}$，$P(B_2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{100}$；所求概率为

$P(B_2\mid A)=\dfrac{P(AB_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)}{P(B_1)+P(B_2)}=\dfrac{1}{2}$。故应填 $\dfrac{1}{2}$。

例 9.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 5）100 件产品中有 4 件次品，从中任取 3 件进行检验，如发现次品则认为这批产品不合格，检验时一件正品被误认为次品的概率为 0.01，一件次品被误认为正品的概率为 0.05，求：（1）检验结果认为这批产品合格的概率；（2）检验合格但实际上所取的三件产品中恰有一件次品的概率。

解析： 针对复杂的事件，一定要先对事件进行分析，将它分解为若干简单事件，然后通过它们之间的关系合理表示出来，借助数学公式将其转化为简单事件的概率。

解：（1）设 A_i 表示所取的三件产品中有 i 件次品，B 表示检验结果认为这批产品合格，由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\times0.99^3+\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\times0.99^2\times0.05+\frac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3}\times0.99\times0.05^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}\times0.05^3\\&\approx0.8629。\end{aligned}$$

（2）由贝叶斯公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\dfrac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\times0.99^2\times0.05}{0.8629}=\frac{0.005528}{0.8629}\approx0.0064。$$

例 9.3.4（难度系数 0.8）设某人从外地赶来参加紧急会议，他乘火车、轮船、汽车或飞机来的概率分别是 $\dfrac{3}{10}$、$\dfrac{1}{5}$、$\dfrac{1}{10}$ 和 $\dfrac{2}{5}$。如果他乘飞机来，不会迟到；而乘火车、

轮船或汽车赶来，迟到的概率分别是$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$。现已经知道此人迟到了，试推断他乘哪一种交通工具的可能性最大？

解析：本题考查全概率公式及贝叶斯公式的综合应用。

解：设事件A_1、A_2、A_3分别表示“某人乘坐交通工具火车、轮船、汽车和飞机”，事件B表示“某人迟到”，则由条件知：$P(A_1)=\frac{3}{10}$；$P(A_2)=\frac{2}{10}$；$P(A_3)=\frac{1}{10}$；$P(A_4)=\frac{4}{10}$；$P(B\mid A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A_2)=\frac{1}{3}$；$P(B\mid A_3)=\frac{1}{2}$，$P(B\mid A_4)=0$。

则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{23}{120}。$$

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{9}{23}，\quad P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\frac{8}{23}，$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{6}{23}，\quad P(A_4\mid B)=\frac{P(A_4)P(B\mid A_4)}{P(B)}=0。$$

由概率判断他乘火车的可能性最大。

例 9.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 16） 一条自动生产线连续生产n件产品不出故障的概率为$\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$n=0,1,2,\cdots$假设产品的优质品率为$p(0<p<1)$，如果各件产品是否优质是相互独立的。（1）计算生产线在两次故障间生产$k(k=0,1,2,\cdots)$件优质品的概率；（2）若已知生产线在某两次故障间生产了k件优质品，求它生产m件产品的概率。

解析：应用题，应对事件进行符号化处理，在具体问题时需注意根据实际问题背景给出相关事件的概率。

解：令B_k为两次故障间共生产k件优质产品，A_n为两次故障间共生产n件产品，则依条件可知：当$n<k$时，$P(B_k\mid A_n)=0$；当$n\geqslant k$时，$P(B_k\mid A_n)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。

（1）由全概率公式可知：

$$\begin{aligned}P(B_k)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)P(B_k\mid A_n)\\&=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^k}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p}，\quad(k=0,1,2\cdots)。\end{aligned}$$

（2）当$m<k$时，$P(A_m\mid B_k)=0$；当$m\geqslant k$时，

$$\begin{aligned}P(A_m\mid B_k)&=\frac{P(A_m)P(B_k\mid A_m)}{P(B_k)}=\frac{k!}{(\lambda p)^k\mathrm{e}^{-\lambda p}}\frac{\lambda^m\mathrm{e}^{-\lambda}}{m!}\frac{m!p^k(1-p)^{m-k}}{k!(m-k)!}\\&=\frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}，\quad m=k,k+1,\cdots\end{aligned}$$

知识点 10　事件独立性的概念及计算方法

更多资源请扫二维码:

10.1　概念、结论

1．概念

定义 10.1.1 事件独立　设 A 与 B 是两个事件，若满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立。

定义 10.1.2 三个事件相互独立　设事件 A、B、C 满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A、B、C 相互独立。

定义 10.1.3 事件两两独立：设事件 A、B、C 满足等式：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A、B、C 两两独立。

定义 10.1.4 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，若其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

2．结论

结论 10.1.1　A 与 B 相互独立除定义 10.1.1 外的另一充要条件是 $P(A\mid B)=P(A)$。

结论 10.1.2　若 A、B、C 相互独立，则 A、B、C 两两独立，但反之不成立。

结论 10.1.3　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ $(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 k（$2\leqslant k\leqslant n$）个事件也是相互独立的。

结论 10.1.4　若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ $(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意事件换成它们的对立事件，所得 n 个事件仍相互独立。特别地，若事件 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

10.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 4，知识点 7
- **主要题型**：事件独立性的判断及应用。
- **综述**：事件的独立性常用来简化概率的计算，简化的公式主要用以下两个：（1）$P(AB)=P(A)P(B)$；（2）$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$。除特殊情况需要根据随机试验的特点判断独立性外，一般在题目中都会告知独立性的条件，此时只要求大家会套用公式计算即可。

10.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 7.3.5

例 10.3.1（难度系数 0.2）设某种子的发芽率为 0.98，求三粒种子中至少有一粒种子发芽的概率。

解析：将一个复杂事件分解成若干个对立的简单事件求解概率题是一种常见的技巧，同时经常和对偶律结合使用。

解：用 B 表示三粒种子中至少有一粒发芽，$A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 粒种子发芽，则 $P(A_i)=0.98\ (i=1,2,3)$，且 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$；因此 $\overline{B}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$。由题可知 A_1、A_2、A_3 相互独立，则 $\overline{A_1}$、$\overline{A_2}$、$\overline{A_3}$ 也相互独立，故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-\left(0.02\right)^3=0.999992\text{。}$$

例 10.3.2（难度系数 0.4）　一个教室里有 4 名一年级男生、6 名一年级女生、6 名二年级男生、若干名二年级女生。为保证随机选择一名学生时，性别和年级是相互独立的，教室里的二年级女生应为多少名？

解析：本题考查事件的含义及事件独立性的理解。

解：设还应有 N 名二年级女生，A 为“任选一名学生为男生”，B 为“任选一名学生为一年级”，则 $P(A)=\dfrac{10}{N+16}$，$P(B)=\dfrac{10}{N+16}$，$P(AB)=\dfrac{4}{N+16}$；欲使性别和年级相互独立，则必须 $P(AB)=P(A)P(B)$，由此得 $\dfrac{4}{N+16}=\dfrac{10}{N+16}\cdot\dfrac{10}{N+16}$，解得 $N=9$，即教室里的二年级女生应为 9 名。

例 10.3.3（难度系数 0.6）　设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\dfrac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$_____。

解析： 本题考查事件独立的概念、性质及其计算方法。

解： 由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 可知 $P(A-B)=P(B-A)$，即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，故 $P(A)=P(B)$，从而 $P(\overline{A})=P(\overline{B})$，由 A、B 独立可推出 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均独立；由条件得 $\dfrac{1}{9}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2$，所以 $P(\overline{A})=\dfrac{1}{3}$，故 $P(A)=\dfrac{2}{3}$。

例 10.3.4（难度系数 0.6，2000 年考研数学四真题）　设 A、B、C 三个事件两两独立，则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是_____。

（A） A 与 BC 独立　　　　（B） AB 与 $A\cup C$ 独立

（C） AB 与 AC 独立　　　　（D） $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

解析： 本题考查事件的关系与运算及事件独立性的判定。

解：（1） A、B、C 相互独立 $\Rightarrow P[A(BC)]=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$ $\Rightarrow A$ 与 BC 相互独立。

（2） A 与 BC 相互独立 $\Rightarrow P(ABC)=P[A(BC)]=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)\Rightarrow$ A、B、C 相互独立。

故选（A）。

例 10.3.5（难度系数 0.8）　设 $P(A)>0, P(B)>0$，证明 A、B 互不相容与 A、B 相互独立不能同时成立。

解析： 概念题，考查独立事件与互不相容事件的区别及联系。

证明： 若 A、B 互不相容，则 $AB=\varnothing$，于是 $P(AB)=0$，$P(A)P(B)>0$，说明 $P(A)P(B)\neq P(A)P(B)$，所以 A、B 不相互独立。

若 A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，于是 $AB\neq\varnothing$，即 A、B 不是互不相容的。

注： 从上面的证明可得到如下结论:

（1）若 A、B 互不相容，且 A、B 是相互独立的 $\Leftrightarrow P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；

（2）因为 $A=BA\cup\overline{B}A$，所以 $P(A)=P(BA)+P(\overline{B}A)$。

特别： 如果 $P(B)=1$，则 $P(\overline{B}A)=0$，从而 $P(AB)=P(A)=P(A)P(B)$，可见概率是 1 的事件与任意事件独立。因此，必然事件与任意事件均独立。

如果 $P(B)=0$，则 $P(AB)=0=P(A)P(B)$，即概率为零的事件与任意事件均独立，因此，不可能事件与任何事件均独立。

知识点 11　用事件独立性进行概率计算

更多资源请扫二维码:

11.1　概念、结论

1．概念

定义 11.1.1 伯努利（Bernoulli）概型　若试验结果只有两个：A 和 $\overline{A}$，则称此试验为伯努利概型。在此概型中，设事件 A 在试验中出现的概率为 p，则 n 次重复独立试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$ 。

2．结论

结论 11.1.1　实际问题中，事件的独立性往往不是根据定义而是根据实际情形来加以判断的。

结论 11.1.2　当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，若事件 A 与 B 互不相容，则事件 A 与 B 不独立。

结论 11.1.3　当 $P(A)>0$， $P(B)<1$ 时，若 $A\subset B$ ，则 A 与 B 不独立。

结论 11.1.4　概率为 0（或者概率为 1）的事件与任一事件 A 相互独立。特别地，不可能事件 $\varnothing$ 与任一事件 A 相互独立，必然事件 $\varOmega$ 与任一事件 A 相互独立。

11.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 4，知识点 16
- **主要题型**：（1）利用事件独立性计算概率；（2）伯努利概型中概率计算。
- **综述**：求解复杂事件的概率时，常把该事件分解为简单事件的和的形式，若简单事件独立，则可利用事件的独立性的相关公式计算。若在分解中，该组简单事件是相互独立的，且试验结果只有 A、$\overline{A}$ 两种情况，则该组事件的概率问题可构成伯努利概型，因而可直接用公式 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$ 计算概率。

11.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　**例 10.3.1**

例 11.3.1（难度系数 0.4）　掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止，求：（1）

正好在第 5 次停止的概率；（2）正好在第 5 次停止的情况下，第 4 次也是出现正面的概率。

解析：利用招数 5.3.2 中的方法处理。

解：（1）A 表示第五次停止，这表示前面四次出现两次正面、两次反面。按伯努利概型方法计算得 $P(A)=C_4^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$。

（2）A_4={第四次出现正面}，所求概率为 $P(A_4|A)$，则

$$P(A_4|A)=\frac{P(AA_4)}{P(A)}=\frac{C_3^1(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2\frac{1}{4}}{3/16}=\frac{1}{2}。$$

例 11.3.2（难度系数 0.6）　甲、乙两人进行乒乓球单打比赛，甲每局获胜的概率为 0.6，若采用五局三胜制，求甲获胜的概率。

解析：利用事件符号化，既有助于表示事件发生的概率，又有利于用数学公式计算概率。

解：设 A_3 表示“甲胜三局”，B_i 表示“乙胜 i 局”，i=0,1,2，甲获胜即事件为 $A_3B_0+A_3B_1+A_3B_2$。

$$\begin{aligned}P\left(A_3B_0+A_3B_1+A_3B_2\right)&=0.6^3+C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot 0.6+C_4^2 0.6^2\cdot 0.4^2\cdot 0.6\\&=0.6^3+C_3^2 0.6^3\cdot 0.4+C_4^2 0.6^3\cdot 0.4^2=0.68256。\end{aligned}$$

所以甲获胜的概率为 0.68256。

例 11.3.3（难度系数 0.6）设 A、B、C 三事件相互独立，试证明 $A-B$ 与 C 相互独立。

解析：本题考查概率的运算公式及事件独立性的判定方法。

证明：
$$\begin{aligned}P((A-B)C)&=P(AC-BC)=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=(P(A)-P(A)P(B))P(C)=(P(A)-P(AB))P(C)=P(A-B)P(C)。\end{aligned}$$

故 $A-B$ 与 C 相互独立。

例 11.3.4（难度系数 0.6）　一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，试求该射手进行一次射击的命中率。

解析：一般情形为已知原因求结果，此题反其道而行之，已知结果找原因。

解：设 A_i 表示“第 i 次击中目标”，$i=1,2,3,4$；设 $P(A_i)=p$，则由条件可知

$$\frac{80}{81}=P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_4}\right)=1-(1-p)^4。$$

解得 $p=\frac{2}{3}$，即该射手进行一次射击的命中率为 $\frac{2}{3}$。

招数 11.3.1　妙招：若试验可分解成每次两个结果的 n 重独立重复试验，则应马上联想到伯努利概型及其概率计算公式。

例 11.3.5（难度系数 0.6，2003 年考研数学三真题）　将一枚硬币独立地掷两次，设

A_1={第一次出现正面}，A_2={第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则（　）。

（A）事件 A_1、A_2、A_3 相互独立　　（B）事件 A_2、A_3、A_4 相互独立

（C）事件 A_1、A_2、A_3 两两独立　　（D）事件 A_2、A_3、A_4 两两独立

解析：本题考查随机事件的独立性的判定。事件的独立性可从事件之间的关系直观判断，也可通过计算相应事件的概率进行判断。

由于 A_4 表示“正面出现两次”，必须在 A_2 表示“第二次出现正面”发生的情况下才有可能，故 A_2、A_4 是有关联的，首先排除（B）和（D）。在此试验中，样本空间 $\Omega=$ {正正，正反，反正，反反}，$P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2A_3)=0$。

故

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)，P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)，P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)。$$

所以 A_1、A_2、A_3 两两独立，选择（C）。

解：（C）。

第1篇测试题

测试题 A

A1.1　设 E_1 为在相同条件下抛掷两枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况，写出该试验的基本事件及样本空间。（知识点 1，难度系数 0.2）

A1.2　掷三次硬币，设 A 表示恰有一次出现正面，B 表示三次都出现正面，C 表示至少出现一次正面，写出本次试验的样本空间及事件 A、B、C。（知识点 1，难度系数 0.2）

A1.3　设 A、B、C 为三个事件，用事件的运算关系表示下列各事件。（知识点 2，难度系数 0.6）

（1）仅 A 发生；（2）A 与 C 都发生，而 B 不发生；

（3）所有三个事件都不发生；（4）至少有一个事件发生；

（5）至多有两个事件发生；（6）至少有两个事件发生；

（7）恰有两个事件发生；（8）恰有一个事件发生。

A1.4　若 $P(A)=0.4$，而且 A、B 互不相容，计算 $P(A\overline{B})$。（知识点 2，难度系数 0.6）

A1.5　设 A、B 为随机事件，且满足 $AB=\overline{A}\overline{B}$，则（　）。（知识点 2，难度系数 0.2）

（A）$A\cup B=\varnothing$　（B）$A\cup B=\Omega$　（C）$A\cup B=A$　（D）$A\cup B=B$

A1.6　一个工人生产了三件产品，以 $A_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 i 件产品是正品，试用 A_i 表示下列事件：（1）没有一件产品是次品；（2）至少有一件产品是次品；（3）恰有一件产品是次品；（4）至少有两件产品不是次品。（知识点 3，难度系数 0.4）

A1.7　设事件 A 与 B 互不相容，$P(A)=P(B)=0.3$，则 $P(\overline{A\cup B})=$______。（知识点 4，难度系数 0.2）

A1.8　设 A、B 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有（　　）。（知识点 4，难度系数 0.6，2006 年考研数学一真题）

（A）$P(A\cup B)>P(A)$　　　　（B）$P(A\cup B)>P(\mathrm{B})$

（C）$P(A\cup B)=P(A)$　　　　（D）$P(A\cup B)=P(B)$

A1.9　下列命题中，正确的是（　　）。（知识点 4，难度系数 0.6）

（A）若 $P(A)=0$，则 A 是不可能事件

（B）若 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，则 A、B 互不相容

（C）若 $P(A\cup B)+P(AB)=1$，则 $P(A)+P(B)=1$

（D）$P(A-B)=P(A)-P(B)$

A1.10　设袋中装有 10 个球，其中红球 6 个、白球 4 个，从中任取 3 个球，求至少取到两个红球的概率。（知识点 5，难度系数 0.2）

A1.11　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率。（知识点 5，难度系数 0.4）

A1.12　某学院某班有 n 个学生，求他们的生日都不相同的概率。（知识点 5，难度系数 0.8）

A1.13　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率。（知识点 6，难度系数 0.6）

A1.4　把长为 a 的棒任意折成三段，求它们可以构成三角形的概率。（知识点 6，难度系数 0.8）

A1.15　在区间[−1，1]上随机取一个数 x，$\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 0～$\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为（　）。（知识点 6，难度系数 0.6，跨知识点综合题）

（A）$\dfrac{1}{3}$　　　（B）$\dfrac{2}{\pi}$　　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　　（D）$\dfrac{2}{3}$

A1.16　设 A、B 为两个随机事件，且 $P(AB)>0$，则 $P(A|AB)=$（　）。（知识点 7，难度系数 0.2）

（A）$P(A)$　　（B）$P(AB)$　　（C）$P(A|B)$　　（D）1

A1.17　某厂有 200 名职工，男、女各占一半，男职工中有 20 人是优秀职工，女职工中有 10 人是优秀职工，从中任选一名职工，用 A 表示所选职工优秀，B 表示所选职工是男职工。求：（1）$P(A)$；（2）$P(B)$；（3）$P(AB)$；（4）$P(A|B)$。（知识点 7，难度系数 0.4）

A1.18　从 52 张扑克牌中任意抽取 4 张，求在至少有 2 张红心的条件下，4 张都是

红心的概率。（知识点 7，难度系数 0.8）

A1.19 袋中有 8 个球，其中有 5 个红球、3 个白球，从中每次取出一个球（不放回）用 A 表示第一次取到红球，B 表示第二次取到红球，求 $P(A)$ 和 $P(B)$。（知识点 8，难度系数 0.2）

A1.20 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，从甲袋中任取 2 球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求该球是白球的概率。（知识点 8，难度系数 0.4）

A1.21 三人同时向一架飞机射击，设他们射中的概率分别为 0.5、0.6、0.7。又设无人射中，飞机不会坠毁；只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；两人击中飞机坠毁的概率为 0.6；三人射中飞机一定坠毁。求三人同时向飞机射击一次飞机坠毁的概率。（知识点 8，难度系数 0.8）

A1.22 袋中装有同面值的 5 个正品硬币、3 个次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一个，将它投掷 2 次，已知每次都得到国徽，试问这个硬币是正品的概率是多少？（知识点 9，难度系数 0.4）

A1.23 已知 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，证明：$P(A)\geqslant P(B)$。（知识点 9，难度系数 0.6）

A1.24 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机取一个地区的报名表，从中先后抽出两份。求：（1）先抽到的一份是女生表的概率；（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。（知识点 9，难度系数 0.6）

A1.25 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　）。（知识点 10，难度系数 0.6，2014 年考研数学一真题）

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

A1.26 甲、乙两名篮球运动员，投篮命中率分别为 0.4 及 0.5，每人各投了 2 次，求二人进球数相等的概率。（知识点 11，难度系数 0.6）

A1.27 四人独立地破译一份密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$。若让他们共同破译，问破译的概率是多少？（知识点 11，难度系数 0.8）

测试题 B

B1.1 设 A、B 为两事件，且 $P(AB)=0$，则（　　）。（知识点 1，难度系数 0.4，1987 年考研数学一真题）

（A）A 与 B 互斥　　（B）AB 是不可能事件

（C）AB 未必是不可能事件　　（D）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

B1.2 假设事件 A 与事件 B 是互为对立事件，则事件 $A\cap B$（　　）。（知识点 1，难度系数 0.4）

（A）是不可能事件　　（B）是可能事件

（C）发生的概率为 1　　（D）是必然事件

B1.3　设 A、B、C 为三个事件，$P(AB)>0$ 且 $P(C|AB)=1$，则有（　）。（难度系数 0.6）

（A）$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　（B）$P(C)\leqslant P(A\cup B)$

（C）$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　（D）$P(C)\geqslant P(A\cup B)$

B1.4　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的。在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 T_0，电炉就断电。以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_1\leqslant T_2\leqslant T_3\leqslant T_4$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于（　　）。（知识点 2，难度系数 0.6，2000 年考研数学三真题）

（A）$\{T_1\geqslant T_0\}$　　（B）$\{T_2\geqslant T_0\}$　　（C）$\{T_3\geqslant T_0\}$　　（D）$\{T_4\geqslant T_0\}$

B1.5 设 A、B、C 为三事件，说明 $AB+BC+AC$ 与 $AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$ 是否相同。（知识点 3，难度系数 0.8）

B1.6　事件 A 与 B 互不相容，则（　　）（知识点 3，难度系数 0.6）

（A）$P(\overline{A}\overline{B})=0$　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A)=1-P(B)$　　（D）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

B1.7　设 $P(A)=0.6$，$P(A-B)=0.2$，$P(B-A)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$、$P(\overline{A}\overline{B})$、$P(A\overline{B})$。（知识点 4，难度系数 0.6）

B1.8　设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.2$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$。（知识点 4，难度系数 0.8）

B1.9　将 4 个球随机地放在 5 个盒子里，求恰有一个盒子有 2 个球的概率。（知识点 5，难度系数 0.6）

B1.10　考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B、C 分别是将一颗骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p_1 和有重根的概率 p_2。（知识点 5，难度系数 0.6，1996 年考研数学一真题）

B1.11　随机取两个正数 x 和 y，均不超过 1，试求 x 与 y 之和不超过 1、积大于 $\frac{3}{16}$ 的概率。（知识点 6，难度系数 0.8）

B1.12　在区间（0，1）中随机取两个数，求两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率。（知识点 6，难度系数 0.8，2007 年考研数学一、三真题）

B1.13　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件中有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率。（难度系数 0.8）

B1.14　设 A、B、C 是随机事件，A、C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，求 $P(AB/\overline{C})$。（知识点 7，难度系数 0.8，2012 年考研数学一真题）

B1.15　设有分别来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份。（1）求先抽到的一份是女生表的概率；（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。（知识点 8，难度系数 0.8）

B1.16 甲口袋有一个红球、两个白球，乙口袋有三个白球，每次从两口袋中各任取一球，交换后放入另一口袋，求交换 n 次后，红球仍在甲口袋中的概率。（知识点 8，难度系数 1.0）

B1.17 设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有（ ）。（知识点 9，难度系数 0.8，1998 年考研考研数学一真题）

（A）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　（B）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$

B1.18 若事件 A、B 满足 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，证明事件 A、B 相互独立。（知识点 10，难度系数 0.8）

B1.19 设 A、B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件。（知识点 10，难度系数 0.6，2002 年考研数学四真题）

B1.20 独立地对同一目标进行三次射击，三次射击的命中率分别为 0.5、0.6、0.7，求三次射击中恰有一次击中目标的概率。（知识点 11，难度系数 0.8）

B1.21 某盒中有 10 件产品，其中 4 件为次品，今从盒中取三次产品，一次取一件，不放回。求：（1）第三次取得正品的概率；（2）第三次才取得正品的概率。（知识点 11，难度系数 0.6）

第 1 篇测试题答案

测试题 A 答案

A1.1 解析： 每掷一次硬币都有两种可能的结果：正面和反面，抛掷两次根据乘法原理，有四种可能，这四种可能即构成样本空间。

解： 分别用“正”与“反”表示“正面”与“反面”，该试验的四个基本事件为正正、正反、反反、反正，其样本空间为 $\Omega=\{$正正，正反，反反，反正$\}$。

A1.2 解析： 可用集合的概念来表示样本空间、基本事件和事件。样本空间是指全集，基本事件是指元素，事件则是指包含在全集中的子集。

解： 样本空间 $\Omega=$｛正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，反正反，反反正，反反反｝；A 为｛正反反，反正反，反反正｝；B 为｛正正正｝；C 为｛正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，反正反，反反正｝。

A1.3 解析： 利用集合的各类运算来描述事件。

解：（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$A\overline{B}C$；（3）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；（4）$A\cup B\cup C$；（5）$\overline{ABC}$；（6）$AB\cup BC\cup AC$；（7）$AC\overline{B}\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$；（8）$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$。

A1.4 解析：结合互不相容事件的概念及差事件的运算律，可给出计算结果。

解：因为 A、B 互不相容，则 $AB=\varnothing$，于是

$$P(A\overline{B})=P(A(\Omega-B))=P(A-AB)=P(A)=0.4\text{。}$$

A1.5 解析：利用事件的运算规律对事件进行简化，由此得出结论。

选择（B），因为 $AB=\overline{A}\overline{B}\Rightarrow(AB)\bigcap(\overline{A}\overline{B})=\overline{A}\overline{B}$，又 $(AB)\bigcap(\overline{A}\overline{B})=\varnothing$，故 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，即 $\overline{A\bigcup B}=\varnothing$，故 $A\bigcup B=\Omega$。

解：（B）。

A1.6 解析：利用事件的运算关系及性质来描述事件。

解：根据事件运算的定义，事件分别表示为：（1）$A_1A_2A_3$；（2）$\overline{A}_1\bigcup\overline{A}_2\bigcup\overline{A}_3$；（3）$\overline{A}_1A_2A_3\bigcup A_1\overline{A}_2A_3\bigcup A_1A_2\overline{A}_3$；（4）$A_1A_2\bigcup A_1A_3\bigcup A_2A_3$。

A1.7 解析：通过 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 进行求解。

解： $P(\overline{A\bigcup B})=1-P(A\bigcup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=0.4$。

A1.8 解析：本题主要考查概率的加法公式与乘法公式。

因为 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(B)$，所以

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(B)=P(A),$$

故选（C）。

解：（C）。

A1.9 解析：本题考查概率的概念及性质。

（1）由 $P(A)=0\nRightarrow A=\varnothing$，说明（A）错误。

（2）因为 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，由 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$，则 $P(AB)=0$，但同样不能认为 $AB=\varnothing$，说明（B）错误。

（3）由 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，则 $P(A\bigcup B)+P(AB)=P(A)+P(B)=1$，说明（C）正确。

（4）只有当 $A\supset B$ 时 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，否则不正确，说明（D）错误。

解：（C）。

A1.10 解析：本题是无放回抽样，而且不论顺序，故用组合公式计算。

解：设 A 表示至少取到两个红球，每种取法是一个样本点，故：

$$P(A)=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n}=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}\text{。}$$

A1.11 解析：当事件 A 的概率较难求解时，可通过 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 求其对立事件的概率进行求解。而且此题中的事件不用考虑顺序，故用组合公式计算。

解：设 A 表示“4 只鞋子中没有两只鞋子配成一双”，则 $P(A)=\dfrac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，则所求事件的概率为 $1-\dfrac{8}{21}=\dfrac{13}{21}$。

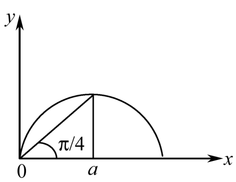
A1.12 解析：此类数学模型在生活中很常见，与顺序有关，用排列式计算。

解:设 A 表示他们的生日都不相同，则 n 个学生可能作为生日的总数为 365^n，而每个同学生日不相同的总数为 P_{365}^n，则所求概率为 $P(A)=\dfrac{P_{365}^n}{365^n}$。

注：当 $n=50$ 时，$P(\overline{A})=1-P(A)=0.97$，说明该班至少有两人生日相同的概率很大。

A1.13 解析：这是一个二维几何概型，处理的关键在于清楚点落区域的几何形状。

解：半圆区域如下图所示。



设 A 表示原点与该点连线与 x 轴夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$，由几何概率的定义可得：

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\text{半圆的面积}}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}。$$

A1.14 解析：本题是一维几何概型，关键在于将事件用数学语言表达。

解：设 A 表示三段可构成三角形，又三段的长分别为 $x,y,a-x-y$，样本空间 $S=\{0<x\neq a,0<y<a,0<x+y<a\}$，其区域面积为 $\dfrac{1}{2}a^2$。

通过对事件 A 分析可知，要构成三角形则必须满足 $\begin{cases}x+y>a-x-y\\x+(a-x-y)>y\\y+(a-x-y)>x\end{cases}$，化简得事件 A 即 $\left\{0<x<\dfrac{a}{2},\ 0<\dfrac{y}{2}<a,\ \dfrac{a}{2}<x+y<a\right\}$，其区域面积为 $\dfrac{1}{8}a^2$，则

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{8}a^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}。$$

A1.15 解析：本题考查几何概型与三角函数运算。

在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个数 x，即 $x\in[-1,1]$ 时，要使 $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 $0\sim\dfrac{1}{2}$ 之间，则需使 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi x}{2}\leqslant-\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi x}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-1\leqslant x\leqslant-\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1$，区间长度为 $\dfrac{2}{3}$，由几何概型知 $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 $0\sim\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为 $\dfrac{\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$。故选（A）。

解：（A）。

A1.16 解析：本题考查条件概率及概率的计算。

$$P(A\mid AB)=\frac{P(AAB)}{P(AB)}=\frac{P(AB)}{P(AB)}=1\text{。}$$

故选（D）。

解：（D）。

A1.17 解析：基础题型。根据概率的定义给出各事件的概率。

解：（1）$P(A)=\dfrac{30}{200}=\dfrac{3}{20}$；（2）$P(B)=\dfrac{1}{2}$；（3）$P(AB)=\dfrac{20}{200}=\dfrac{1}{10}$；（4）$P(A\mid B)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$。

A1.18 解析：本题考查条件概率及概率的计算，解决这类问题时一定要用符号表示事件，既有利于表示事件的概率，又有利于应用数学公式计算。

解：设 A 表示取的牌中至少两张为红心，B_i 表示取的四张牌中恰有 i 张为红心，$i=2,3,4$，则 $A=B_2+B_3+B_4$，故所求概率为

$$P(B_4\mid A)=\frac{P(AB_4)}{P(A)}=\frac{P(B_4)}{P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)}=\frac{C_{13}^4}{C_{13}^2C_{39}^2+C_{13}^3C_{39}^1+C_{13}^4}=\frac{715}{69667}\text{。}$$

A1.19 解析：用符号表示事件既有利于表示事件的概率，又有利于应用数学公式计算。

解：运用古典概型易知 $P(A)=\dfrac{5}{8}$。

对事件 A，直接求其概率较困难，但因为事件 B 发生的概率与事件 A 发生有关，且易知 $P(B\mid A)=\dfrac{4}{7}$，$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{5}{7}$，所以可用全概率公式计算

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{8}\text{。}$$

注：由求解过程可见，第一次、第二次取到红球的概率相同，说明先取和后取的概率相等。

A1.20 解析：全概率公式应用的关键在于确定划分，此题划分的主要依据是从甲袋中取出的两球的情况。

解：设 A 表示从乙袋中取出的是白球，B_i 表示从甲袋中取出的两个球恰有 i 个白球，$i=0,1,2$，由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_0)P(A\mid B_0)+P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)\\&=\frac{C_2^2}{C_5^2}\frac{4}{10}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\frac{1}{2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\frac{6}{10}=\frac{13}{25}\text{。}\end{aligned}$$

A1.21 解析：应用全概率公式时，必须分析题目，正确写出题设，找出（或计算）先验概率和条件概率。

解：设 A_i 表示第 i 个人射中，$i=1,2,3$，有 $P(A_1)=0.5$，$P(A_2)=0.6$，$P(A_3)=0.7$。又设 B_0 表示三人都未射中，B_1 表示只有一人射中，B_2 表示恰有二人射中，B_3 表示三人同时射中，C 表示飞机坠毁。由题设可知：

$$P(C\mid B_0)=0,\quad P(C\mid B_1)=0.2,\quad P(C\mid B_2)=0.6,\quad P(C\mid B_3)=1。$$

并且 $P(B_0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$。

同理：
$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=0.5\times0.4\times0.3+0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.4\times0.7=0.29。\end{aligned}$$

同样计算得：$P(B_2)=0.44$，$P(B_3)=0.21$。利用全概率公式便得

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(C\mid B_i)=0.06\times0+0.29\times0.2+0.44\times0.6+0.21\times1=0.532。$$

A1.22 解析：本题考查贝叶斯公式的应用。

解：设 A 表示投掷硬币 2 次都得到国徽，B 表示这只硬币为正品。

由题知：$P(B)=\dfrac{5}{8}$，$P(\overline{B})=\dfrac{3}{8}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$，$P(A\mid\overline{B})=1$，则由贝叶斯公式知：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}=\frac{5}{17}。$$

A1.23 解析：本题考查条件概率的定义及概率的计算。

解：由 $P(A\mid C)\geqslant P(B\mid C)$，得 $\dfrac{P(AC)}{P(C)}\geqslant\dfrac{P(BC)}{P(C)}$，即 $P(AC)\geqslant P(BC)$。

由 $P(A\mid\overline{C})\geqslant P(B\mid\overline{C})$，同样可得 $P(A\overline{C})\geqslant P(B\overline{C})$，故

$$P(A)=P(AC)+P(A\overline{C})\geqslant P(BC)+P(B\overline{C})=P(B)。$$

A1.24 解析：复杂事件的概率计算一定要通过事件符号化，借助数学公式将其转化为简单事件概率。

解：设 A_i 表示报名表取自第 i 区考生，$i=1,2,3$，B_j 表示第 j 次取出的是女生表，$j=1,2$。则 $P(A_i)=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3$；$P(B_1\mid A_1)=\dfrac{3}{10}$，$P(B_1\mid A_2)=\dfrac{7}{15}$，$P(B_1\mid A_3)=\dfrac{5}{25}$。

（1）$P(B_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_1\mid A_i)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{25})=\dfrac{29}{90}$；

（2）由于 $P(\overline{B}_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(\overline{B}_2\mid A_i)P(A_i)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{7}{10}+\dfrac{8}{15}+\dfrac{20}{25})=\dfrac{61}{90}$，

$$P(B_1\overline{B_2})=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\overline{B}_2\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24})=\frac{2}{9},$$

故 $P(B_1|\overline{B_2})=\dfrac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B_2})}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\dfrac{20}{61}$。

A1.25 解析：本题考查事件独立条件下的事件的运算。

因为 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，故

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3$。

解得 $P(A)=0.6$，则：

$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.5\times0.6=0.5-0.3=0.2$。

故选择（B）。

解：（B）。

A1.26 解析：将事件符号化以计算概率。

解：设 A_i 表示甲进 i 球，B_i 表示乙进 i 球，$i=0,1,2$，且 A_i、B_i 相互独立，则所求概率为 $P(A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2)$，所以

$P(A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2)=0.4^2\times0.5^2+C_2^1\times0.6\times0.4\times C_2^1\times0.5^2+0.6^2\times0.5^2=0.37$。

二人进球数相等的概率为 0.37。

A1.27 解析：方法同题 A1.26。

解：设 A_i 表示第 i 个人破译密码，$i=1,2,3,4$，A_1、A_2、A_3、A_4 相互独立，A 表示密码被译出，则 $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$。

故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=1-P(\overline{A}_1)(\overline{A}_2)(\overline{A}_3)(\overline{A}_4)$$
$$=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{4})=\frac{7}{10}。$$

因此共同破译的概率是 $\dfrac{7}{10}$。

测试题 B 答案

B1.1 解析：不可能事件 $\varnothing$ 的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件 Ω 的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

选择（C），理由如下：概率为 0 的事件不一定是不可能事件；而 A 与 B 互斥指的是它们的积事件是不可能事件，故（A）错误；（B）结论错误；（D）可举反例为 A、B 为互不相容事件，可以说明（D）错误。

解：（C）。

B1.2 解析：根据互为对立事件的定义，可知结果。选（A），这是因为对立事件的积事件是不可能事件。

解：（A）。

B1.3 解析：本题考查条件概率的概念及概率的相关性质。

由 $P(C|AB)=1$ 知 $P(ABC)=P(AB)$，故 $P(C)\geqslant P(AB)$。即 $P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，故应选（C）。

解：（C）。

B1.4 解析：本题主要考查事件的关系及运算。

解：由题设，可知事件 E={只要有两个温控器显示温度≥T_0}

={两个或两个以上温控器显示温度≥T_0}＝{$T_3\geqslant T_0$}，

故选择（C）。

B1.5 解析：结合事件之间的关系及运算律，可对事件进行简化，从而更好地了解事件表示的含义。

解：因 $AB=ABC+AB\overline{C}$，表示至少 A、B 发生，故 $AB+BC+AC$ 表示 A、B、C 中至少发生两个的事件；$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$ 表示 A、B、C 三事件中有且仅有两个事件发生的事件。因而它们不相同。

B1.6 解析：本题主要考查事件的关系与运算。由于

$$AB=\varnothing\Rightarrow P(AB)=P(\varnothing)=0\Rightarrow P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})=1。$$

因此选（D）。

解：（D）。

B1.7 解析：本题考查概率的加法公式及减法公式。

解：（1）由于 $0.2=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-P(AB)$，所以 $P(AB)=0.4$，故 $P(\overline{AB})=0.6$。

（2）由于 $0.3=P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-0.4$，所以 $P(B)=0.7$；

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1+P(AB)-P(A)-P(B)=0.1。$$

（3）$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.2$。

B1.8 解析：结合条件概率及概率的加法和减法公式进行计算。

解：因为 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.2$，所以

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{0.2}{0.4+0.7-0.2}=\frac{2}{9}。$$

B1.9 解析：复杂事件的样本点数讨论常分步进行，再利用乘法原理计算所求样本点数。

解: 设 $B=\{$恰有一个盒子有 2 个球$\}$，观察把 4 个球随机放入 5 个盒子中共有 $5^4=625$ 种等可能的结果，故样本点总数为 625。事件 B 的讨论可分为两步：先分盒子，再分球，即先在 5 个盒子中选一个盒子用来放两个球，再选两个盒子用来各放一球，共有 $C_5^1C_4^2=30$ 种方法；然后在 4 个球中取 2 个球放在一个盒子里，其他 2 个球各放在一个盒子里共有 $C_4^2C_2^1=12$ 种方法，根据乘法原理，$B=\{$恰有一个盒子有 2 个球$\}$的样本点总数为 $30\times12=360$。则 $P(B)=\dfrac{360}{625}=\dfrac{72}{125}$。

B1.10 解析： 复杂的问题可通过列表的形式将问题细化进行讨论。

解： 一枚骰子掷两次，其样本点数为 36；方程组有实根的充要条件是 $B^2-4C\geqslant0$，即 $C\leqslant\dfrac{B^2}{4}$；方程组有重根的充要条件是 $B^2-4C=0$，即 $C=\dfrac{B^2}{4}$；

B	1	2	3	4	5	6
$C\leqslant\dfrac{B^2}{4}$ 的样本点数	0	1	2	4	6	6
$C=\dfrac{B^2}{4}$ 的样本点数	0	1	0	1	0	0

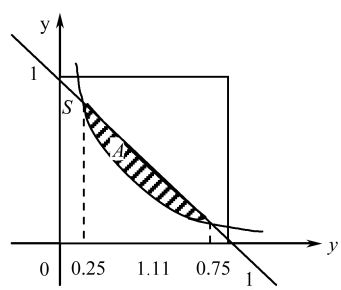
则方程组有实根样本点数为：$1+2+4+6+6=19$；使方程组有重根的样本点数为 2，故所求概率为 $p_1=\dfrac{19}{36}$，$p_2=\dfrac{1}{18}$。

B1.11 解析： 本题考查二维几何概型的计算，计算的关键在于将所讨论的概率问题转化为数学函数问题。

解： 此问题的样本空间为 $S=\{0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant1\}$。如下图所示。

$A=\left\{x\geqslant0, y\geqslant0,\ x+y\leqslant1,\ xy\geqslant\dfrac{3}{16}\right\}$，故

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\int_{\frac14}^{\frac34}\left(1-x-\frac{3}{16x}\right)\mathrm{d}x=0.25-\frac{3}{16}\ln3。$$



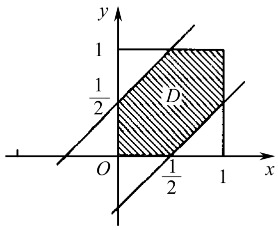
B1.12 解析： 本题考查二维均匀分布或几何概型。

解： 设随机取到的两个数为 X、Y，则 (X,Y) 服从正方形区域 $\{0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$ 上的均匀分布。

方法一，利用二重积分计算：

$$P\{|X-Y|<\frac12\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac34。$$

方法二，根据几何概型计算，如下图所示。



$$P(A)=P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\}=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{3}{4}$$

B1.13 解析：本题考查事件关系及运算，处理的方法是将问题符号化。

解：设 A 表示所取两件产品中有一件是不合格品，B_i 表示所取两件产品中恰有 i 件不合格，$i=1,\ 2$. 则 $A=B_1+B_2$；

$P(A)=P(B_1)+P(B_2)=\dfrac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}+\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}$，因此所求概率为 $P(B_2\mid A)=\dfrac{P(B_2)}{P(A)}=\dfrac{C_4^2}{C_4^1C_6^1+C_4^2}=\dfrac{1}{5}$。

B1.14 解析：本题考查概率的性质及条件概率的运算。

解：因为 $P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(\overline{C})=1-P(C)=\dfrac{2}{3}$，又 A、C 互不相容，所以 $P(ABC)=0$，

$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=\dfrac{1}{2}-P(ABC)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(AB/\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{3}{4}$。

B1.15 解析：利用事件符号化计算概率。

解：（1）设 A_i 表示取到第 i 个地区，B_i 表示抽出的第 i 份是女生表，依题可得

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\ i=1,2,3,\quad P(B_1\mid A_1)=\frac{3}{10},\ P(B_1\mid A_2)=\frac{7}{15},\ P(B_1\mid A_3)=\frac{5}{25}。$$

（2）$P(B_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_1\mid A_i)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{25})=\dfrac{29}{90}$；

（3）$P(B_1\mid\overline{B}_2)=\dfrac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B}_2)}$。

而

$$P(\overline{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(\overline{B}_2\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25})=\frac{61}{90},$$

$$P(B_1\overline{B_2})=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\overline{B}_2\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24})=\frac{2}{9},$$

故 $P(B_1\mid\overline{B_2})=\dfrac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B_2})}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\dfrac{20}{61}$。

B1.16 解析：利用事件符号化将应用问题化为数学问题。

解：设事件 A_i 表示第 i 次交换后红球仍在甲口袋中，$p_i=P(A_i)$，$i=1,2,\cdots$, 则 $p_0=1$，

$P(A_{i+1}\mid A_i)=\dfrac{2}{3}$，$P(A_{i+1}\mid\overline{A}_i)=\dfrac{1}{3}$；根据全概率公式得

$$p_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-p_{n-1}\right)=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+1\right),\ n\geqslant1。$$

上式改写为 $p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，$n\geqslant1$；将 $p_0=1$ 代入得

$$p_n=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\right]^n,\ n=1,2,3,\cdots$$

B1.17 解析：利用条件概率公式直接验证或采用取特殊值法判断。

解：方法一。由于 $P(B|A)=P(B|\overline{A})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}|B)P(B)}{1-P(A)}$，则

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{(1-P(A|B))P(B)}{1-P(A)}\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}。$$

化简得 $P(AB)=P(A)P(B)$，故选择（C）。

方法二：特殊值法。设随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，取 A 表示 $\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\}$，$B$ 表示 $\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{3}{4}\}$，则有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}$，且 $P(A|B)=P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}$，于是（B）和（D）被排除；再取 A 表示 $\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{3}\}$，$B$ 表示 $\{\frac{1}{6}\leqslant X\leqslant\frac{2}{3}\}$，则有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}$，此时 $P(A|B)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A}|B)=\frac{2}{3}$；从而（A）被排除，故选择（C）。

B1.18 解析：本题考查概率的运算及事件独立的判定。

证明： $P(A|B)=P(A|\overline{B})$ 即 $\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$，得 $P(AB)P(\overline{B})=P(A\overline{B})P(B)$，即 $P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$，因此 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A 与 B 相互独立。

B1.19 解析：本题考查随机事件的独立性。

证明：由于 A 的概率不等于 0 和 1，可知题中两个条件概率都存在。

（1）必要性。由事件 A 与 B 相互独立，可知事件 $\overline{A}$ 与 B 也相互独立，因此 $P(B|A)=P(B)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$；所以有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$。

（2）充分性。由 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，可见 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，得

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),$$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$。因此 A 和 B 独立。

B1.20 解析：利用事件符号化，既有助于表示事件发生的概率，同时又有利于用数学公式计算概率。

解：设 A、B、C 分别表示事件第一、二、三次射击时击中目标，显然 A、B、C 为相互独立的事件，则事件“三次射击中恰有一次击中目标”可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$，即有

$$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$$
$$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$
$$=0.5\times0.4\times0.3+0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.4\times0.7=0.29\text{。}$$

三次射击中恰有一次击中目标的概率 0.29。

B1.21 解析：利用事件符号化计算概率。

解：（1）设 A_i 表示第 i 次取到正品，$i=1,2,3$，则

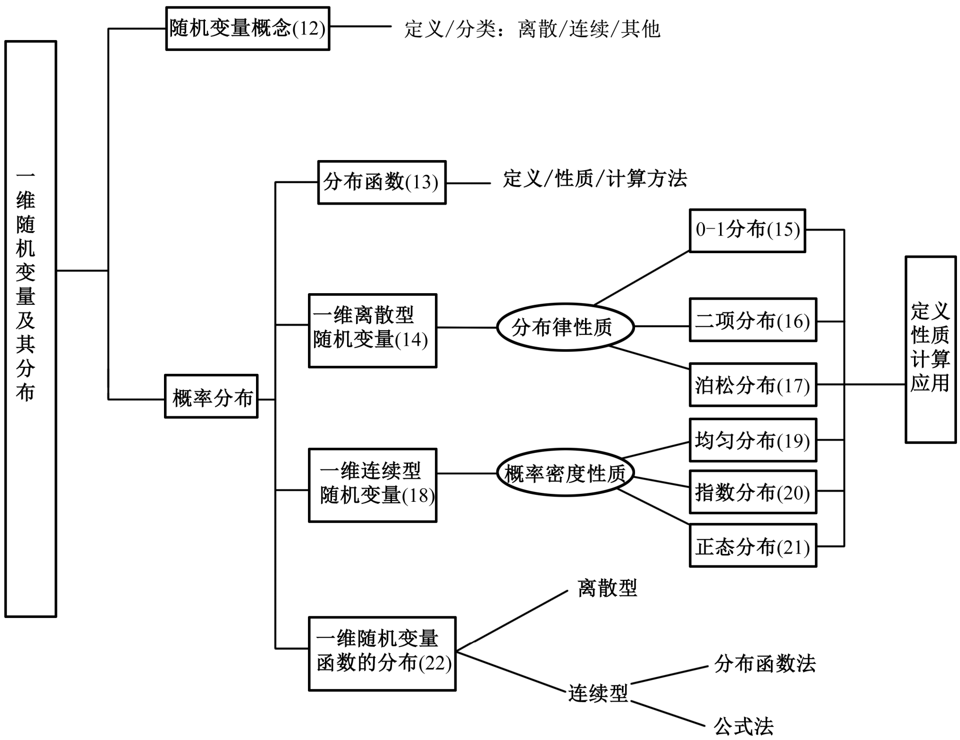
$$P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{5}\text{。}$$

注：该题也可用抽签与顺序无关的结论，直接得出 $P(A_3)=\dfrac{3}{5}$。

（2）第三次才取得正品，即事件 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，则 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{6}{8}=\dfrac{1}{10}=0.1$。

第 2 篇　随机变量及其分布

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 2 篇

综　述

更多资源请扫二维码：

为了讨论随机现象，可将随机试验的结果数量化，于是引出随机变量 [12] 的概念，随机变量是定义在样本空间的一个单值实值函数，该函数与高等数学中函数的不同之处有两点：一是其定义域为样本空间，样本空间中的元素不一定是实数；二是此函数的取值是不确定的。通过引进随机变量，大家就可以用高等数学的理论和方法来计算随机试验中事件发生的概率，也可以更加精确、完整地刻画随机试验的统计规律性。

对随机变量的讨论可以从两方面进行：一方面是随机变量的分布函数 [13]，一维随机变量的分布函数是随机变量不大于自变量 x 所表示事件的概率，有了此概念，任意单一事件都可以通过分布函数来描述，由概率的性质可引出分布函数的四个基本性质，求解随机变量的分布函数是本课程讨论的一个重要内容。另一方面是随机变量的分布律或概率密度。随机变量主要可分为离散型随机变量和连续型随机变量。离散型随机变量 [14] 是指取值为有限个或无限但可列多个的随机变量，除分布函数外，分布律是刻画它的更有力的工具，它指明了离散型随机变量的所有取值，而且给出了该随机变量取每个值的概率。确定离散型随机变量的分布律是本篇讨论的主要问题，常见的离散型随机变量的分布有 0-1 分布 [15]，二项分布 [16]，泊松分布 [17] 等，掌握这些分布的背景及分布律公式是解决相关概率问题的关键；连续型随机变量 [18] 是取值为连续区间的随机变量，除分布函数外，它还可用概率密度函数来定义。一维连续型随机变量的分布函数和概率密度两者之间可以通过求导和定积分相互转化，掌握连续型随机变量的概率密度的性质是解决该类随机变量问题的基础，常见连续型随机变量的分布有均匀分布 [19]、指数分布 [20]、正态分布 [21] 等，其中正态分布是最常见、最重要的分布。必须清楚这些分布的定义和性质，掌握其所表示的事件概率的计算方法，特别是正态分布，必须掌握正态分布的随机变量的中心化过程以及通过标准正态分布计算概率的方法。

注意针对离散型和连续型随机变量有不同的研究方法，连续型随机变量是基于离散型随机变量结合高等数学极限的思想方法来研究的。

随机变量的函数[22]仍是随机变量。若针对离散型，只需要找出随机变量取值的对应关系即可求出函数的分布，其求法相对简单；针对连续型，则应该从分布函数的对应关系入手，其求法相对难一些，在求解的过程中有时候要根据实际情况分段讨论，也可以直接套用相关定理，但要特别注意定理的条件。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 12　随机变量

更多资源请扫二维码：

12.1　概念、结论

1．概念

定义 12.1.1 随机变量　设试验的样本空间为 Ω，如果对 Ω 中每个事件 ω 都有唯一的实数值 $X = X(\omega)$ 与之对应，则称 $X = X(\omega)$ 为随机变量，简记为 X。

2．结论

结论 12.1.1　随机变量的分类

（1）离散型随机变量：随机变量的取值为有限个或无限但可列多个；

（2）连续型随机变量：随机变量的取值为整个实数集或若干区间，并可借助概率密度函数来定义；

（3）其他类型：由于离散型和连续型随机变量的定义方式不同，故形成了第三种其他类型的随机变量。

结论 12.1.2　随机变量是一个定义在样本空间 Ω 上的单值实值函数，由于试验结果具有随机性，所以 X 的取值也具有随机性。

结论 12.1.3　随机变量是概率的“集合模型”转为“函数模型”的桥梁，通过随机变量将随机事件的问题转化为函数的问题。利用分布律或概率密度函数，可将概率计算从用集合计算过渡到应用微积分等方式进行计算，这使得概率的描述更加精确。

结论 12.1.4　对随机变量而言，$\{X < a\}$ 和 $\{X \leqslant a\}$，$\{b < X < a\}$ 和 $\{b < X \leqslant a\}$ 表示的是不同的事件。

12.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18
- **主要题型**：（1）随机变量的设定；（2）用随机变量表示事件。
- **综述**：随机变量是利用微积分等数学方法计算事件概率的基础。随机变量是定

义在样本空间上的实值函数，而此函数的选取一方面需结合随机试验的过程及结果，另一方面需结合所要讨论的问题，同一个随机试验中可以构造多个随机变量。

12.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 15.3.1，例 15.3.1

例 12.3.1（难度系数 0.2）　试给出满足下列条件的随机变量：（1）可能取值为 1，2，…，10 的随机变量；（2）可能取值至少充满一个区间的随机变量。

解析：随机变量的选择取决于试验的结果和目的。有的实验结果本身就是实数，此时实验结果即为随机变量的取值；有的实验结果不是实数，则需要作一一对应。

解：（1）某公共汽车车上共有 20 名旅客，沿途共有 10 个站点，设 X 表示汽车在站点停车后有旅客下车的站点数，则 X 的全部可能取值为 $X=1,2,\cdots,10$。

（2）某电子元件的使用寿命 X 小时，X 的全部可能取值为 $[0,+\infty)$，即可能取值充满区间 $[0,+\infty)$。

例 12.3.2（难度系数 0.4）　设试验为从袋中同时取出 3 个球，该袋子中有 6 个同样大小的球，编号为 1、2、3、4、5、6。试设计两个随机试验并分别写出其随机变量的所有取值。

解析：同一个随机试验中可以构造出多个随机变量，这是因为研究者的试验目的不同的缘故。

解：设 X 表示随机试验中取出的球的最大编号，则 X 为随机变量，其取值为 $3,4,5,6$；设 Y 表示随机试验中取出的球的最小编号，则 Y 也为随机变量，其取值为 $1,2,3,4$。

招数 12.3.1 妙招：不同的随机试验的目的不同，结果往往也不相同。根据目的观察随机试验的所有结果，即可确定随机变量的所有取值。

例 12.3.3（难度系数 0.4）　在灯泡使用寿命的检测中，一般规定寿命在 10000 小时以上的灯泡为合格品，否则为不合格品，试用随机变量来表示合格品及不合格品。

解析：本题考查随机变量的概念，利用随机变量表示事件是解决概率问题的基础。

解：设 X 表示灯泡的使用寿命，则 X 为随机变量，其取值为 t，$0\leqslant t<+\infty$；合格品为 $\{X\geqslant 10000\}$；不合格品为 $\{X<10000\}$。

例 12.3.4（难度系数 0.6）　在 n 次独立射击试验中，写出三个该随机试验中产生的随机变量。

解析：随机变量须根据试验的目的和需要解决的问题合理选择。

解：设 X 表示 n 次独立射击中击中的次数，则 X 为随机变量，其取值为 $0,1,2,\cdots,n$；设 Y 表示 n 次独立射击中第一次击中的次数，则 Y 为随机变量，其取值为 $1,2,\cdots,n$；设 Z 表示 n 次独立射击中第二次击中的次数，则 Z 为随机变量，其取值为 $2,3,\cdots,n$。

知识点 13　分布函数的概念及性质

更多资源请扫二维码:

13.1　概念、结论

1．概念

定义 13.1.1 分布函数　设 X 为随机变量，x 是任意实数，则函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$ $(-\infty<x<\infty)$ 称为随机变量 X 的分布函数。

2．结论

结论 13.1.1　分布函数的性质

（1）$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，$-\infty<x<+\infty$；

（2）$F(x)$ 是单调不减函数，即当 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

（3）$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

（4）$F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的；

（5）$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$；

（6）$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$，$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$。

注：满足上述前四条性质的函数 $F(x)$ 即可作为某随机变量 X 的分布函数。

结论 13.1.2　随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 就是 X 的取值落在无穷区间 $(-\infty,x]$ 内的概率值，由此定义，任一事件均可通过分布函数的运算来描述，可见分布函数可完整地描述随机变量 X 随机取值的统计规律性。

结论 13.1.3　特别注意：若随机变量 X 的取值范围为 $[a,b]$，则当 $x<a$ 时，$F(x)=0$，当 $x\geqslant b$ 时，$F(x)=1$，所以求分布函数 $F(x)$ 的重点是求出当 $a\leqslant x<b$ 时 $F(x)$ 的表达式。

结论 13.1.4　分布函数的求法：

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}\sum\limits_{x_i\leqslant x}P(X=x_i), & X\text{为离散型随机变量，}\\ \int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t, & X\text{为连续型随机变量，并且}f(x)\text{可求积。}\end{cases}$$

13.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18
- **主要题型**：（1）分布函数的判别；（2）分布函数的求解；（3）利用分布函数求事件的概率；（4）利用分布函数求概率密度或分布律。
- **综述**：分布函数的判别：在理解分布函数是否满足四个性质的基础上，可以判别所给函数是否可以成为某个随机变量的分布函数；分布函数的求解：对连续型随机变量，主要对概率密度进行定积分计算，特别注意应用定积分的可加性；对离散型随机变量，先求分布律，再据分布律求分布函数；利用分布函数求事件的概率和利用分布函数求概率密度或分布律等，关键在于对公式的理解。注意：分布函数是单调增加且值域在区间[0,1]的右连续函数。

13.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　**例 18.3.1**，　**例 18.3.4**

例 13.3.1（难度系数 0.4）　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-x}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）常数 a；（2）$P\{X\leqslant 0\}$；3）$P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}$。

解析：基础题型。根据分布函数的概念及性质计算。

解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，得 $a=1$；

（2）$P\{X\leqslant 0\}=F(0)=\dfrac{1}{2}$；

（3）$P\{-1\leqslant X\leqslant 2\}=F(2)-F(-1)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2}}-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}}$。

招数 13.3.1 妙招：利用分布函数的性质可确定分布函数中的未知参数。

例 13.3.2（难度系数 0.4）　下列各函数中，可以作为某随机变量分布函数的是（ ）。

（A）$F(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$　　（B）$F(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan x$

（C）$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0\end{cases}$　　（D）$F(x)=\arctan x+\dfrac{2}{\pi}$

解析：本题考查分布函数的概念及性质；注意分布函数是单调递增且值域在区间[0，1]的右连续函数。

由于分布函数满足 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，故（A）不成立。由分布函数的性质 $F(+\infty)=1$，

$F(-\infty)=0$，知（B）、（D）不正确。而（C）中$F(x)$是单调不减的函数，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；而且$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；$F(x)$是右连续的，因而（C）为某随机变量的分布函数。选择（C）。

解：（C）。

例 13.3.3 （难度系数 0.6，2010 年考研数学三真题） 随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$。则$P\{X=1\}=$（　）。

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　（D）$1-\mathrm{e}^{-1}$

解析：利用分布函数可求出任意事件的概率，对事件$\{X=a\}$，$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$，此式适合任意随机变量；若X是连续型随机变量，则概率$P\{X=a\}=0$，但此事件可能发生，即概率为零的事件是可能发生的。此题随机变量既非离散，也非连续，因此只能根据上述公式求。

由分布函数的性质，得$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$，故选择（C）。

解：（C）。

例 13.3.4 （难度系数 0.6）　设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{8}, & x=-1,\\ ax+b, & -1<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

又已知$P\{X=1\}=\dfrac{1}{8}$，则（　）。

（A）$a=\dfrac{6}{16}$，$b=\dfrac{8}{16}$　（B）$a=\dfrac{7}{16}$，$b=\dfrac{9}{16}$　（C）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　（D）$a=\dfrac{3}{8}$，$b=\dfrac{3}{8}$

解析：根据分布函数的概念及性质计算。

由分布函数的右连续性可得$\lim\limits_{x\to-1^+}F(x)=-a+b=F(-1)$，即$-a+b=\dfrac{1}{8}$；又$P\{X=1\}=F(1)-F(1^-)=1-(a+b)=\dfrac{1}{8}$，即$a+b=\dfrac{7}{8}$；将上述两式构成方程组求解得$a=\dfrac{6}{16}$，$b=\dfrac{8}{16}$，故（B）、（C）和（D）均不正确。

当$a=\dfrac{6}{16}$，$b=\dfrac{8}{16}$时，$F(x)$是单调不减函数，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；而且$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；$F(x)$是右连续的，故选择（A）。

解：（A）。

注：本题中的随机变量X很特殊，它既非离散，也非连续，因为其分布函数不是阶梯函数，判断的依据是它非完全的“阶梯形”函数，也不能表示成某函数的积分。

招数 13.3.2　妙招：利用分布函数的性质给出含参数的方程组，对该方程组进行求解后，再将结果代入分布函数中进行验证。

例 13.3.5（难度系数 0.6）　设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别是随机变量X_1与X_2的分布函数，为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数中应取（　）。

（A）$a=\dfrac{3}{5}$，$b=-\dfrac{2}{5}$　（B）$a=\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$　（C）$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$　（D）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

解析：本题考查分布函数的概念及性质，方法同上。

由分布函数的性质$F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$知，（B）、（C）、（D）均不正确；而当$a=\dfrac{3}{5}$，$b=-\dfrac{2}{5}$时，$F(x)$是单调不减的函数，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；而且可以得到$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；$F(x)$是右连续的，故选择（A）。

解：（A）。

例 13.3.6（难度系数 0.8，1997 年考研数学一真题）　设随机变量X的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，在事件$\{-1<x<1\}$出现的条件下，X在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比。试求：（1）X的分布函数$F(x)=P\{X\leqslant x\}$；（2）$P\{X<0\}$。

解析：本题考查分布函数的概念及求法，首先确定随机变量X的取值范围，对不在此范围的变量x，分布函数均取定值，对在此范围的变量x，借助公式利用区间分解方法计算相应概率。

解：（1）X的取值范围为$[-1,1]$，分布函数为$F(x)=P\{X\leqslant x\}$。

当$x<-1$时，$F(x)=0$；当$x\geqslant 1$时，$F(x)=1$；

当$x=-1$时，$F(x)=P\{X\leqslant -1\}=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}=\dfrac{1}{4}$；

当$-1<x<1$时，
$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}=\frac{1}{4}+P\{-1<X\leqslant x,\ -1<X<1\}\\&=\frac{1}{4}+P\{-1<X<1\}P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{x+2}{4}\text{。}\end{aligned}$$

$$故\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{x+2}{4}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1。\end{cases}$$

（2）$P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}-P\{X=0\}=F(0)-0=\dfrac{1}{2}$。

例 13.3.7 （难度系数 0.8，跨知识点 14，18） 设$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$，则下列叙述正确的是（ ）。

（A）$F(x)$是随机变量的分布函数 （B）$F(x)$不是分布函数

（C）$F(x)$是离散型随机变量的分布函数 （D）$F(x)$是连续型随机变量的分布函数

解析： 本题考查分布函数的概念及性质，判断一个函数是否为分布函数的关键在于它是满足分布函数基本性质。

因 $F(x)$ 是单调不减的函数，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；而且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；$F(x)$是右连续的，故$F(x)$是随机变量$X$的分布函数；但$X$不是离散型，因为若是离散型，则$X$的取值只能是有限个或无限可列多个；但$X$也不是连续型随机变量，因$F(x)$仅仅是右连续的，而不是连续的。故选择（A）。

解：（A）。

知识点 14 一维离散型随机变量及其分布律

更多资源请扫二维码:

14.1 概念、结论

1．概念

定义 14.1.1 离散型随机变量 若随机变量X的取值只取有限个或者无限可列个，则称X是离散型随机变量。

定义 14.1.2 离散型随机变量的分布律 若离散型随机变量X的取值为$x_1,x_2,\cdots$则称$P\{X=x_i\}=p_i\ (i=1,2,\cdots)$为$X$的分布律。随机变量$X$的分布律具有如下性质：

（1）$p_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots$（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$。

2. 结论

结论 14.1.1　对于离散型随机变量 X，它的分布函数为 $F(x)=\sum\limits_{x_k\leqslant x}p_k=\sum\limits_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}$，$k=1,2,\cdots$，在 X 的所有可能值 x_k $(k=1,2,\cdots)$ 处均具有“跳跃”的特征，跳跃值恰为该处的概率值 $p_k=P\{X=x_k\}$，因此 $F(x)$ 的图形是一系列水平阶梯线；$F(x)$ 为右连续的阶梯函数，分段点是 x_k $(k=1,2,\cdots)$。

结论 14.1.2　离散型随机变量的分布律常用列表的形式表示如下。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$p_k=P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

结论 14.1.3　在同一次随机试验中可以提出多种概率问题进行讨论，因而试验中可以产生多种随机变量。

结论 14.1.4　求解离散型变量的分布律的步骤是：首先根据随机变量的含义，确认随机变量所有的取值，其次求解随机变量取每一个值的概率。

14.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 15，知识点 16，知识点 17
- **主要题型**：（1）已知随机变量的分布函数求分布律；（2）确定随机变量分布律中的未知参数；（3）求随机变量的分布律；（4）利用分布律求事件的概率；（5）已知随机变量的分布律求分布函数。
- **综述**：离散型随机变量的分布律，由随机变量的取值以及随机变量取每个值的概率两部分构成；确定随机变量的取值，主要依赖于随机试验的样本空间的选取及随机变量的含义；随机变量取每个值（事件）的概率，可利用第 1 篇求事件概率的方法。

14.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 8.3.5，　例 11.3.5，　例 33.3.1

例 14.3.1（难度系数 0.2）　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$，求随机变量 X 的分布律。

解析：本题考查离散型随机变量的分布律与分布函数的关系。离散型随机变量的分布函数是阶梯函数，其“台阶”的个数确定了随机变量的取值个数；分段点为随机变量的取值，再利用分布函数求取每个值的概率。

解：由 $F(x)$ 知，其分段点为 $X=-1,1,3$；易求各个间断点相应的概率，得 X 的分布律为

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

例 14.3.2 （难度系数 0.6，跨知识点 5） 设在 10 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布律；（2）求 X 的分布函数。

解析：求离散型随机变量的分布律关键在于两点：（1）随机变量的所有可能取值；（2）随机变量取所有可能值（事件）的概率。

解：任取三只，其中含次品个数 X 可能为 0、1、2 个。

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}；\quad P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}；\quad P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}。$$

（1） X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

（2） X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{7}{15}, & 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{14}{15}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant 2。\end{cases}$

例 14.3.3 （难度系数 0.6） 设 X 为某随机变量，且 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$（1）判断上式是否为 X 的分布律；（2）若是分布律，求 $P\{X取偶数\}$ 和 $P\{X>3\}$。

解析： $P\{X=x_i\}=p_i\ (i=1,2,\cdots)$ 为某离散型随机变量的分布律的充要条件是：（1） $p_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots$（2） $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$。利用分布律可求事件发生的概率。

解：（1）由于 $0\leqslant P\{X=k\}\leqslant 1$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，所以 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律。

（2） $P\{X取偶数\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$；

$P\{X>3\}=1-(P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\})=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=\frac{1}{8}$。

例 14.3.4（难度系数 0.6）　一实习生用一台机器接连生产了三个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\frac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 X 表示三个零件中合格品的个数，求 X 的分布律。

解析：方法类似例 14.3.2。

解：设 A_i 表示第 i 个零件是合格品，$i=1,2,3$。则

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24},$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{24},$$

$$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24},$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{24}。$$

所以 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{6}{24}$

例 14.3.5（难度系数 0.8，跨知识点 5、13）　从一批有 13 个正品和 2 个次品的产品中任意取 3 个产品，求抽得的次品数 X 的分布律和分布函数，并求 $P\{\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{5}{2}\}$。

解析：方法类似于例 14.3.2。

解：先求 X 的分布律，X 的所有可能取值为 0、1、2，由古典概型的概率计算公式知：

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35},\ P(X=1)=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^2}=\frac{12}{35},\ P(X=2)=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}。$$

故 X 的分布律为

$X=x_i$	0	1	2
$P\{X=x_i\}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

为了求 X 的分布函数 $F(x)$，可将 $(-\infty,+\infty)$ 分成 $(-\infty,0)$、$[0,1)$、$[1,2)$、$[2,+\infty)$ 四个区间进行计算：

当 $-\infty<x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X=0\}=\frac{22}{35}$；

当$1 \leqslant x < 2$时，$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \dfrac{34}{35}$；

当$x \geqslant 2$时，$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 1$；

综合上述，得X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{22}{35}, & 0 \leqslant x < 1; \\ \dfrac{34}{35}, & 1 \leqslant x < 2; \\ 1, & x \geqslant 2。 \end{cases}$$

由分布函数可求出$P(\dfrac{1}{2} < X \leqslant \dfrac{5}{2}) = F(\dfrac{5}{2}) - F(\dfrac{1}{2}) = 1 - \dfrac{22}{35} = \dfrac{13}{35}$。

注意：离散型随机变量的分布函数一定是分段函数，其分段数比该随机变量的取值个数多一个。

例 14.3.6 （难度系数 0.8，跨知识点 7）某人有 n 把外形相似的钥匙，其中只有 1 把能打开房门，但他不知道是哪一把，只好逐把试开，求此人直至将门打开所需的试开次数的分布律。

解析：先求随机变量的所有可能取值；再求随机变量取所有可能值（事件）的概率。

解：设X表示将门打开所需的试开次数，X的全部可能取值为$X = 1, 2, \cdots, n$，$\{X = k\}$表示第k次打开门，前面$k-1$次没有打开门，则$P\{X=1\} = \dfrac{1}{n}$，$P\{X=2\} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$，$P\{X=3\} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\dfrac{1}{n-2} = \dfrac{1}{n}$，以此类推，可得$P\{X=n\} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{n}$，故此人直至将门打开所需的试开次数的分布律为$P\{X=i\} = \dfrac{1}{n}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

知识点 15　0-1 分布与几何分布

更多资源请扫二维码：

15.1　概念、结论

1．概念

定义 15.1.1 0-1 分布　若随机变量X只可能取 0 和 1 两个值，它的分布律是

$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \quad (k=0,1)$，则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布。

定义 15.1.2 几何分布　若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1,2,\cdots)$，其中 $p\geqslant 0$，则称 X 服从参数为 p 的几何分布。

定义 15.1.3 超几何分布　若随机变量 X 的分布律是 $P\{X=m\}=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$，$(m=0,1,\cdots,n)$，则称 X 服从参数为 $N,M,n(n\leqslant N,M\leqslant N)$ 的超几何分布。

2．结论

结论 15.1.1　在伯努利试验中包含多次独立重复试验，记实验开始直至事件 A 出现为止的试验次数为 X，则 X 服从几何分布；设 N 件产品中有 M 件次品，若从中任取 n 件，则其中取到的次品数 X 服从参数为 n，N，M 的超几何分布。

结论 15.1.2　当产品数 N 很大，样品数 n 很小时，$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\approx C_n^m p^m(1-p)^{n-m} \ (p=\dfrac{M}{N})$，即超几何分布近似于二项分布，但两者区别主要在于：超几何分布中各次试验不是独立的，而且各次试验中表示“成功”的事件概率不相等。

结论 15.1.3　几何分布具有“无记忆性”，即当 $m>0$，$n>0$ 时，有

$$P\{X=m+n \mid X>m\}=P\{X=n\}。$$

结论 15.1.4　0-1 分布的数学期望为 $E(X)=p$，方差为 $D(X)=p(1-p)$；几何分布的数学期望为 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，方差为 $D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$；超几何分布的数学期望为 $E(X)=\dfrac{nM}{N}$；方差为 $D(X)=\dfrac{nM}{N}(1-\dfrac{M}{N})(\dfrac{N-n}{N-1})$。

15.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 14
- **主要题型**：求 0-1 分布及几何分布的分布律及相关事件的概率。
- **综述**：对离散型随机变量的分布律，首先要理解随机变量在随机试验中所表示的含义，然后据此确定随机变量的所有可能取值，并求每个可能取值下事件发生的概率。0-1 分布及几何分布是最简单的两种离散型分布。注意几何分布、超几何分布等概率模型的应用。

15.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 35.3.4

例 15.3.1（难度系数 0.4）　进行若干次重复独立实验，设每次成功的概率为 $p\,(0<p<1)$，失败的概率为 $q=1-p$。（1）将实验进行到出现一次成功为止，以 X 表示

所需的试验次数，求 X 的分布律；（2）将实验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律。

解析： 离散型随机变量的分布律，在清楚其可能取值的基础上，关键是清楚随机变量取每个值所代表的事件的意义，然后通过概率计算的方法计算取相关值的概率。

解：（1） X 的取值为 $X=1,2,\cdots$ $X=k$ 表示前 $k-1$ 次失败，第 k 次成功，故 X 的分布律为 $P\{X=k\}=pq^{1-k}$，$k=1,2,\cdots$

（2） Y 的取值为 $Y=r$，$r+1$，$r+2,\cdots$ 由于 $Y=r+n$ 表示前面 $r+n-1$ 中有 $r-1$ 成功，n 次失败，且第 $r+n$ 成功，故 Y 的分布律为

$$P(Y=r+n)=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r-1}p=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r},\quad n=0,1,2,\cdots$$

注： 此时称 Y 服从以 r、p 为参数的巴斯卡分布。

招数 15.3.1 趣招：几何分布 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\quad(k=1,2,\cdots)$ 的通项是几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p$ 的一般项，故称为几何分布；几何分布一般表示事件首次发生的概率，故有时也称为等待分布，题目中出现诸如“直到……为止”“出现……立即进行…”“仅当……才”“首次”等用词，且事件之间是相互独立的，可考虑运用几何分布。

例 15.3.2（难度系数 0.6） 重复独立实验中，设每次实验成功的概率为 $p\ (0<p<1)$，失败的概率为 $q=1-p$，求第 n 次试验时正好成功 r 次的概率。

解析： 复杂事件计算概率的关键在于清楚每个事件的含义。

解： 设 A 表示事件“第 n 次试验时正好成功 r 次”，即前 $n-1$ 次试验中成功 $r-1$ 次，第 n 次试验出现成功，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P\,\{\text{前 } n-1 \text{ 次试验，成功 } r-1 \text{ 次}\}\,P\,\{\text{第 } n \text{ 次试验成功}\}\\&=C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}\cdot p=C_{n-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}\text{。}\end{aligned}$$

例 15.3.3（难度系数 0.6） 某试验成功的概率为 $\dfrac{3}{4}$，失败的概率为 $\dfrac{1}{4}$，以 X 表示试验首次成功所需试验的次数，计算 X 取偶数的概率。

解析： 先求离散型随机变量的分布律，再通过分布律求具体事件的概率。

解： 试验首次成功所需试验的次数的所有可能取值为 $X=1,2,\cdots,n,\cdots$，$X=k$ 表示前面 $k-1$ 次未打开，而在第 k 次打开，则 $P(X=k)=(\dfrac{1}{4})^{k-1}\dfrac{3}{4}$，故 X 的分布律为 $P\{X=k\}=(\dfrac{1}{4})^{k-1}\dfrac{3}{4}$，$k=1,2,\cdots,n,\cdots$

X 取偶数的概率为 $P\{X=2\}+P\{X=4\}+\cdots+P\{X=2k\}+\cdots$

$$=(\frac{1}{4})^{1}\frac{3}{4}+(\frac{1}{4})^{3}\frac{3}{4}+\cdots+(\frac{1}{4})^{2k-1}\frac{3}{4}+\cdots=\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^{2}}=\frac{1}{5}\text{。}$$

例 15.3.4 （难度系数 0.8，跨知识点 8） 一房间有四扇同样大小的窗子，其中只有

一扇是打开的，有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去；鸟在房间里飞来飞去，试图飞出房间；假定鸟是没有记忆的，鸟飞向各扇窗子是随机的。（1）以 X 表示鸟成功飞出房间时总共试飞的次数，求 X 的分布律。（2）户主声称，他养的一只鸟，是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数，如果户主所说是真实的，试求 Y 的分布律。（3）求试飞次数 X 小于 Y 的概率。

解析： 本题考查离散型随机变量的分布律的求解方法及复杂事件概率的计算。

解：（1）X 的可能取值为 $X=1,2,\cdots,n,\cdots$。$P\{X=n\}$ 表示前 $n-1$ 次飞向了另外三扇窗子，第 n 次飞了出去，故 $P\{X=n\}=(\frac{3}{4})^{n-1}\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}}{4^n}$，$n=1,2,\cdots$ 为 X 的分布律。

（2）Y 的可能取值为 $Y=1,2,3,4$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{4}$，$Y=2$ 表示第一次飞向另外三扇窗子，第二次飞向打开的窗子，故 $P\{Y=2\}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$。同样可求

$$P\{Y=3\}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}，\quad P\{Y=4\}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}。$$

则 Y 的分布律为 $P\{Y=i\}=\frac{1}{4}，i=1,2,3,4$。

（3）由于 X、Y 相互独立，则 $P\{X<Y\mid Y=k\}=P\{X<k\}$，

$$\begin{aligned}P\{X<Y\}&=\sum_{k=2}^{4}P\{Y=k\}P\{X<Y\mid Y=k\}\\&=P\{Y=2\}P\{X=1\}+P\{Y=3\}\left[P\{X=1\}+P\{X=2\}\right]+\\&\quad P\{Y=4\}\left[P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}\right]\\&=\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}\right)\right]=\frac{81}{256}。\end{aligned}$$

例 15.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 33，2015 年考研数学三真题）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2，& x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数。

（1）求 Y 的分布律；（2）求 $E(Y)$。

解析： 本题一方面考查了随机变量的分布律的计算方法，另一方面考查了随机变量的分解，由此方便计算随机变量的数字特征。

解：（1）记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$，从而

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}，\quad n=2,3,\cdots$$

此即为Y的分布律。

（2）将随机变量Y分解成$Y=M+N$，M、N为两个事件，其中M表示从1到$n(n<k)$次试验观测值大于3首次发生，N表示从$n+1$次到第k次试验观测值大于3首次发生，则M、N均可看做几何分布，且$M\sim \mathrm{Ge}(n,p)$，$N\sim \mathrm{Ge}(k-n,p)$，所以

$$E(Y)=E(M+N)=E(M)+E(N)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}=16。$$

知识点16　二项分布

更多资源请扫二维码:

16.1　概念、结论

1．概念

定义16.1.1 伯努利试验　设试验E只有两个可能结果A、$\overline{A}$，则称试验E为伯努利试验；将E独立重复地进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重伯努利试验。

定义16.1.2 二项分布　在n重伯努利试验中，设$P(A)=p$，事件A发生的次数是随机变量X，则X可能取值为$0,1,2,\cdots,n$；$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，其中$q=1-p$，$0<p<1$，$k=0,1,2,\cdots,n$；则称随机变量X服从参数为n、p的二项分布，记为$X\sim b(n,p)$。

2．结论

结论16.1.1　在二项分布$X\sim b(n,p)$中，当$n=1$时，$P(X=k)=p^k q^{1-k}$，$k=0,1$，这就是0-1分布，所以0-1分布是二项分布的特例。

结论16.1.2　设$X_i(i=1,2,\cdots,n)$是相互独立且都服从参数为p的0-1分布，则$X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$服从参数为$n$、$p$的二项分布，即$X\sim b(n,p)$。此结论常用于应用题及求数学期望与方差的题型。

结论16.1.3　二项分布的数学期望$E(X)=np$；方差$D(X)=np(1-p)$。

结论16.1.4　“二项分布”名称的由来：$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$刚好是二项式$(p+q)^n$的展开式中出现p^k的那一项。

16.2　知识点及解题方法综述

- 知识点考频：3

- **最关联知识点**：知识点 14
- **主要题型**：（1）二项分布中参数 n、p 的确定；（2）求服从二项分布所表示的随机变量的数字特征及所表示的事件概率。
- **综述**：二项分布中参数的确定一般需结合题目中的已知条件，利用二项分布公式或概率计算方法求解；对二项分布，必须熟知其公式及数字特征的计算方法。在应用题中，判断一个随机试验是否服从二项分布以及确定其参数是一个难点。

16.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 8.3.3，　例 8.3.4，　例 20.3.1，　例 36.3.4

例 16.3.1（难度系数 0.2）　设随机变量 $X\sim b(2,p)$，随机变量 $Y\sim b(3,p)$，若 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$____。

解析：本题考查服从二项分布的随机变量所表示的事件的概率。

因为 $X\sim b(2,p)$，则 $P\{X=k\}=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}$，$k=0,1,2$；$Y\sim b(3,p)$，则

$$P\{Y=k\}=C_3^k p^k(1-p)^{3-k}，k=0,1,2,3。$$

$$P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_2^0 p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2=\frac{5}{9}，$$

即 $(1-p)^2=\dfrac{4}{9}$，解得 $p=\dfrac{1}{3}$，所以 $P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-p)^3=1-(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{19}{27}$。

解：$\dfrac{19}{27}$。

招数 16.3.1 险招：确定随机变量所服从的分布，应首先确定其分布类型，然后再确定分布中的参数。

例 16.3.2（难度系数 0.6）　有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 4 杯，如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。（1）某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒，他连续试验 10 次，成功 3 次，试问他是猜对的，还是他确有区分的能力？（设各次试验是相互独立的）

解析：二项分布题型中常常包括其他知识点的内容，例如计算事件出现的概率，其中包括利用古典概型或概率密度计算事件出现的概率。第二问根据“小概率事件在一次试验中基本不会发生”的原理来判断。

解：（1）试验成功一次的概率为 $p_1=\dfrac{1}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$。

（2）先假设他没有区分能力，即他是随机抽取的。设 X 表示 10 次试验中成功的次数，则 $X\sim b(10,\ \dfrac{1}{70})$；连续试验 10 次，成功 3 次，即 $P\{X=3\}=C_{10}^3(\dfrac{1}{70})^3(\dfrac{69}{70})^7=\dfrac{3}{10000}$，此概率太小，一般情况下，此事件不会发生，但事实是发生了，按实际推断原理，就认

为他确有区分能力。

例 16.3.3 （难度系数 0.6） 一张考卷上有五道选择题，每道题列出四个可能答案，其中有一个答案是正确的，求某学生仅靠猜测能答对至少四道题的概率是多少。

解析：这是常见的题型，主要考查对二项分布的理解及其所对应伯努利实验的事件概率的计算。

解：因为该学生仅靠猜测答对每道题的概率为 $p=\dfrac{1}{4}$，这是 $n=5$， $p=\dfrac{1}{4}$ 的独立重复试验，以 X 表示该学生仅靠猜测答对的题目数，则 $X\sim b(5,\dfrac{1}{4})$，且所求概率为

$$P\{X\geqslant 4\}=C_5^4(\frac{1}{4})^4\frac{3}{4}+C_5^5(\frac{1}{4})^5=\frac{1}{64}\text{。}$$

例 16.3.4 （难度系数 0.6） 某人有两盒火柴，吸烟时从任一盒中取一根火柴，经过一段时间后，发现一盒火柴已经用完，如果最初两盒中各有 n 根火柴，求这时另一盒中还有 r 根的概率。

解析：求解该问题的关键在于解析事件，因此如何设出事件及事件间的关系，将复杂事件分解成简单事件就显得尤其重要。

解：设 A 表示事件“发现一盒已经用完另一盒还有 r 根”，将两盒火柴区分为甲盒和乙盒， B 表示事件“发现甲盒已经用完乙盒还有 r 根”，则 $P(A)=2P(B)$；在 B 发生的情况下可以得出甲盒拿了 $n+1$ 次，乙盒拿了 $n-r$ 次，共进行了 $2n+1-r$ 次试验，而且前 $2n-r$ 次试验，甲发生 n 次，第 $2n+1-r$ 次试验甲发生，故 $P(B)=C_{2n-r}^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r}\times\dfrac{1}{2}$，从而

$$P(A)=2P(B)=C_{2n-r}^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}\text{。}$$

知识点 17　泊松分布

更多资源请扫二维码:

17.1　概念、定理及结论

1．概念

定义 17.1.1　泊松分布　设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$， $\lambda>0$， $k=0,1,2\cdots$ 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim\pi(\lambda)$ 或者 $P(\lambda)$。

2．定理

定理 17.1.1　泊松定理　设 $\lambda>0$ 是常数，n 是任意正整数，且 $np_n=\lambda$，则对于任意取定的非负整数 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$。

3．结论

结论 17.1.1　泊松分布常用在诸如飞机被击中的子弹数、到达公共汽车站的乘客数、机床发生故障的次数、自动控制系统中元件损坏的个数、某商店中来到的顾客人数等事件，这些事件的分布均近似服从泊松分布。

结论 17.1.2　泊松定理：当试验次数 n 很大、概率 p 很小，且 $\lambda=np$ 时，有

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

即泊松分布可作为二项分布的极限分布。

结论 17.1.3　若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，则其数学期望为 $E(X)=\lambda$，方差为 $D(X)=\lambda$。

17.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 2
- **最关联知识点：** 知识点 14
- **主要题型：**（1）泊松分布中参数 λ 的确定；（2）求服从泊松分布所表示的随机变量的数字特征及所表示的事件概率。
- **综述：** 泊松分布中参数的确定一般需要结合题目中的已知条件，并利用泊松分布公式进行求解。对泊松分布，必须熟知其分布律及数字特征的计算方法，熟悉泊松分布表的应用。

17.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 36.3.1，　例 36.3.2，　例 37.3.6

例 17.3.1（难度系数 0.4）　设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P\{X\leqslant 1\}=4P\{X=2\}$，求 $P\{X=3\}$。

解析： 本题考查泊松分布的概念及概率计算，其分布中参数的确定主要利用概率公式及已知条件。

解： 因为 X 服从泊松分布，则 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0,1,2\cdots$，

由于 $P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$，$P\{X=2\}=\dfrac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$。

由 $P\{X \leqslant 1\} = 4P\{X = 2\}$，知 $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda}$，即 $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$，解得 $\lambda = 1$，故 $P\{X = 3\} = \dfrac{1}{6}e^{-1}$。

例 17.3.2 （难度系数 0.6，2008 年考研数学一、三真题） 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X = E(X^2)\right\} =$ ____。

解析： 本题考查泊松分布的概率特点及数字特征的计算方法。

由于 $X \sim P(1)$，则 $E(X) = D(X) = 1$， $E(X^2) = [E(X)]^2 + D(X) = 2$，因此

$$P\{X = E(X^2)\} = P\{X = 2\} = e^{-1}\frac{1}{2!} = \frac{1}{2e}。$$

解： $\dfrac{1}{2e}$。

例 17.3.3 （难度系数 0.8） 有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了保险公司的人寿保险，在一年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在年初须交 12 元保险费，而在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金，求：（1）保险公司亏本的概率；（2）保险公司获利不少于 10000 元的概率。

解析： 若二项分布的参数 n 较大，其概率的计算常借助泊松定理通过泊松分布表进行近似计算，也可通过中心极限定理近似计算（参见第 5 篇）。

解：（1）年初，保险公司一年的总收入为 $2500 \times 12 = 30000$ 元，设一年中死亡人数为 X，则 $X \sim b(2500, 0.002)$，则所求概率为：

$$P\{2000X > 30000\} = P\{X > 15\} = 1 - P\{X \leqslant 14\},$$

由于 n 很大、p 很小，$\lambda = np = 5$，故用泊松近似，有

$$P(X > 15) \approx 1 - \sum_{k=0}^{14}\frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.000069。$$

（2）保险公司获利不少于 10000 元的概率为

$$p = P\{30000 - 2000X \geqslant 10000\} = P\{X \leqslant 10\} \approx \sum_{k=0}^{10}\frac{e^{-5}5^k}{k!} \approx 0.986305,$$

即保险公司获利不少于 10000 元的概率在 98%以上。

例 17.3.4 （难度系数 0.8，跨知识点 8） 设昆虫产 k 个卵的概率为 $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率为 p，若卵的孵化是相互独立的，求此昆虫的下一代有 n 条的概率。

解析： 本题考查利用全概率公式计算事件的概率及利用泊松定理作近似计算。

解： 设 A 表示“昆虫的下一代有 n 条”，B_k 表示“昆虫产 k 个卵”，$k = n, n+1, \cdots$ 则

$$P(A) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k)P(A \mid B_k) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^n p^n (1-p)^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda} p^n}{n!(k-n)!}(1-p)^{k-n}$$

$$=\frac{(\lambda p)^n}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-n}}{(k-n)!}=\frac{(\lambda p)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda p}\text{。}$$

例 17.3.5 （难度系数 0.8，跨知识点 16）　设在一段时间内进入某一商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种物品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数 Y 的分布律。

解析：本题考查全概率公式及泊松分布的应用，概率分布应用的关键在于掌握分布产生的背景。

解：由于 X 服从泊松分布，所以 $P\{X=m\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$，$m=0,1,2,\cdots$；设购买某种物品的人数为 Y，在进入商店的人数 $X=m$ 的条件下，Y 服从 $b(m,p)$ 分布，即

$$P\{Y=k\mid X=m\}=\mathrm{C}_m^k p^k(1-p)^{m-k},\ k=0,1,\cdots,m,$$

由全概率公式有

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=k}^{\infty}P\{X=m\}P\{Y=k\mid X=m\}=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\cdot C_m^k p^k(1-p)^{m-k}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{k!(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p},\ k=0,1,2,\cdots$$

注：此题说明进入商店的人数服从参数为 λ 的泊松分布，购买这种物品的人数仍服从泊松分布，但参数改变为 λp。

知识点 18　一维连续型随机变量及其概率密度

更多资源请扫二维码:

18.1　概念、结论

1. 概念

定义 18.1.1 连续型随机变量　设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$，则称随机变量 X 为连续型随机变量。其中，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数或概率密度。$f(x)$ 的图形是一条曲线，称为概率密度曲线。

2．结论

结论 18.1.1 设 X 为连续型随机变量，则
$P\left(x_1 \leqslant X \leqslant x_2\right)=P\left(x_1<X \leqslant x_2\right)=P\left(x_1 \leqslant X<x_2\right)=P\left(x_1<X<x_2\right)=F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)$。

结论 18.1.2 概率密度函数的性质如下：

（1）$f(x) \geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x=1$；

注：一般而言，如果一个函数 $f(x)$ 满足上述（1）和（2），则它可作为某个随机变量的概率密度函数。

（3）$P\{x_1<X \leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d} x$；

（4）若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

结论 18.1.3 对于连续型随机变量 X，虽然有 $P\{X=x\}=0$，但事件 $\{X=x\}$ 并不一定为不可能事件 $\varnothing$，即概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

结论 18.1.4 因为 $P\{x<X \leqslant x+\Delta x\} \approx f(x) \Delta x$，所以概率密度 $f(x)$ 表示的不是随机变量 X 在 x 点取值的概率，而是 X 在 x 附近取值的“密集”程度，即 $f(x)$ 的大小能反映出 X 在 x 的邻域内取值概率的大小。

18.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**3
- **最关联知识点：**知识点 19，知识点 20，知识点 21
- **主要题型：**（1）求概率密度函数中的未知参数；（2）已知随机变量的概率密度，求其分布函数或用其表示的事件概率；（3）判断所给函数是否为某随机变量的概率密度。
- **综述：**利用概率密度的性质可判断所给函数是否为某随机变量的概率密度，并可以求解其中的未知参数；已知随机变量的概率密度，求其分布函数或用其表示的事件的概率，则主要利用下列公式：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d} t$，$P(x_1<X \leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d} x$。

18.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 34.3.5，　例 36.3.5

例 18.3.1（难度系数 0.4） 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+1, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0\ , & \text{其他} \end{cases},$$

求：（1）常数 a；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$P\{1<X<3\}$。

解析：本题考查随机变量概率密度的性质以及概率密度与分布函数的关系。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(ax+1)\mathrm{d}x=(\frac{a}{2}x^2+x)\Big|_0^2=2a+2$，故 $a=-\frac{1}{2}$。

（2）X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}0\\ \int_0^x(1-\frac{u}{2})\mathrm{d}u\\ 1\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-\frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2。\end{cases}$$

（3）$P\{1<x<3\}=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2(1-\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$。

例 18.3.2（难度系数 0.6）　设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则（　）。

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

（B）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（C）$F_1(x)\ F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（D）$f_1(x)\ f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

解析：本题考查随机变量分布函数及概率密度的性质。用排除法处理该问题，理由如下：由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，排除（A）；由 $F(+\infty)=1$，排除（B）；对（D）举反例，如概率密度 $f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$，$f_2(x)=\begin{cases}1, & x\in(1,2)\\ 0, & x\notin(1,2)\end{cases}$，则有 $f_1(x)f_2(x)=0$，排除（D）；而（C）中 $F_1(x)\ F_2(x)$ 满足分布函数的四个性质，故选择（C）。

解：（C）。

例 18.3.3（难度系数 0.4）　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f(x)$ 是否为概率密度函数？若不是，如何将之略作改造，成为概率密度函数？

解析：利用随机变量概率密度的性质进行计算。

解：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)$ 不是概率密度函数。

令 $p(x)=\frac{4}{\pi}f(x)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $p(x)$ 是随机变量的概率密度函数。

招数 18.3.1 妙招：判断某函数是否为随机变量的概率密度或已知概率密度欲确定其中的参数，均利用公式 $f(x)\geqslant 0$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$。

例 18.3.4 （难度系数 0.6） 设随机变量 X 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} a+b\mathrm{e}^{-x\lambda}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \quad \lambda>0 。$$

求：（1）常数 a,b；（2）$P\{X<3\}$，$P\{X \geqslant 1\}$；（3）X 的概率密度函数 $f(x)$。

解析： 本题考查随机变量分布函数的性质以及概率密度与分布函数的关系。

解：（1）由 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0-} F(x)$，得 $a=1$，$b=-1$。

（2） $P\{X<3\}=P\{X \leqslant 3\}=F(3)=1-\mathrm{e}^{-3\lambda}$；

$P\{X \geqslant 1\}=1-F(1)=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda})=\mathrm{e}^{-\lambda}$。

（3）X 的概率密度函数为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0。\end{cases}$

例 18.3.5 （难度系数 0.6，2000 年考研数学三真题） 设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{2}{9}, & 3 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

若常数 k 使得 $P\{X \geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$，求常数 k 的取值范围。

解析： 本题考查连续型随机变量的概率计算问题，通过概率密度求概率要用到定积分，由于概率密度函数是分段函数，所以计算时注意利用定积分的可加性。

解： 由 $P\{X \geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$，知 $P\{X<k\}=\dfrac{1}{3}$。

若 $k<0$，则 $P\{X<k\}=0$；若 $0 \leqslant k<1$，则 $P\{X<k\}=\int_0^k \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{k}{3}<\dfrac{1}{3}$；

当 $k=1$ 时，$P\{X<1\}=\int_0^1 \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$；当 $1<k \leqslant 3$ 时，$P\{X<k\}=\int_0^1 \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^k 0\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$；

若 $3<k \leqslant 6$，则 $P\{X<k\}=\int_0^1 \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_3^k \dfrac{2}{9}\mathrm{d}x=\dfrac{2k}{9}-\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{3}$；若 $k>6$，则 $P\{X<k\}=1$。

综合上述，当 $1 \leqslant k \leqslant 3$ 时满足 $P\{X \geqslant k\}=\dfrac{2}{3}$。

知识点 19　均匀分布

更多资源请扫二维码:

19.1　概念、结论

1．概念

定义 19.1.1 均匀分布　设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$，则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$。

2．结论

结论 19.1.1　若 $X\sim U(a,b)$，则其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$。

结论 19.1.2　均匀分布的“均匀性”是指随机变量 X 落在区间 (a,b) 内长度相等的任意两个子区间上的概率都是相等的；即设 $X\sim U(a,b)$，则

$$P\{c\leqslant X\leqslant d\}=\frac{d-c}{b-a}\ (a<c<d<b)。$$

结论 19.1.3　若 $X\sim U(a,b)$，则其数学期望为 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$；方差为 $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$。

19.2　知识点及解题方法综述

● **知识点考频**：2

● **最关联知识点**：知识点 18

● **主要题型**：（1）求均匀分布的参数或数字特征；（2）求服从均匀分布的随机变量所表示的事件概率；（3）求均匀分布函数的分布及其数字特征。

● **综述**：均匀分布中参数的确定一般需结合题目中的已知条件，利用均匀分布公式或其他条件建立方程组求解。在确定参数的基础上可通过结论 19.2.3 中的公式计算其数字特征。服从均匀分布的随机变量所表示的事件概率或分布函数等问题，一般可通过

相关公式进行计算。

19.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： **例 22.3.4**

例 19.3.1 （难度系数 0.2） 设随机变量 X 服从 $[-a,\ a]$ 上的均匀分布，其中 $a>0$。（1）若 $P\{X>1\}=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$______；（2）若 $P\{X<1\}=0.7$，则 $a=$______；（3）若 $P\{|X|<2\}=P\{|X|>2\}$，则 $a=$______。

解析： 本题考查服从均匀分布的随机变量所表示的事件概率的计算方法。

解： 随机变量 X 服从 $[-a,\ a]$ 上的均匀分布，则 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & x\in[-a,\ a],\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

（1）由于 $\dfrac{1}{4}=P\{X>1\}=\int_1^a \dfrac{1}{2a}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}(a-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a}$，得 $a=2$。

（2）由 $0.7=P\{X<1\}=\int_{-a}^1 \dfrac{1}{2a}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}(1+a)=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2}$，得 $a=\dfrac{4}{10}$。

（3）由 $P\{|X|<2\}=P\{|X|>2\}=1-P\{|X|\leqslant 2\}$，即 $\dfrac{1}{2}=P\{|X|<2\}=\int_{-2}^2 \dfrac{1}{2a}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{a}$，得 $a=4$。

例 19.3.2 （难度系数 0.6） 在 $[0,6]$ 上任取一点记为 X，求 $P\left\{X^2-5X+6\geqslant 0\right\}$。

解析： 根据题目的条件给出随机变量的取值范围，再利用均匀分布的概率密度计算事件发生的概率。

解： 解方程 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=2$，$x_2=3$。

由于 $X\sim U[0,6]$，则 $X^2-5X+6\geqslant 0$ 等价于 $\{0\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{3\leqslant x\leqslant 6\}$。

另一方面，由于 $X\sim U[0,6]$，即 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & 0\leqslant x\leqslant 6,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

故 $P\left\{X^2-5X+6\geqslant 0\right\}=P\left\{0\leqslant X\leqslant 2\right\}+P\left\{3\leqslant X\leqslant 6\right\}=\dfrac{5}{6}$。

例 19.3.3 （难度系数 0.6） 在某公共汽车站，五个人分别独立地等 1、2、3 路汽车，设每个人等车时间（分钟）均服从 $[0,6]$ 上的均匀分布，求五人中至多有两个人等车时间不超过 2 分钟的概率。

解析： 注意这里需要设出两个随机变量，X 为每个人等车的时间，Y 为等车人数，两个随机变量中一个是离散型，另一个是连续型。注意两个随机变量之间的关系。

解： 因为每个人等车的时间 X（分钟）均服从 $[0,6]$ 上的均匀分布，所以其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x\leqslant 6,\\ 1, & x>6。\end{cases}$$

依题意，等车时间不超过 2 分钟的人数 $Y\sim \mathrm{b}(5,p)$，其中 $p=P\{X\leqslant 2\}=F(2)=\dfrac{1}{3}$，所求概率为：

$$P\{Y\leqslant 2\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}+P\{Y=2\}=C_5^0\left(\frac{2}{3}\right)^5+C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4+C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{192}{243}。$$

例 19.3.4（难度系数 0.6，跨知识点 33）　设某球体的直径在区间 $[0,6]$ 上服从均匀分布，求该球体体积的平均值。

解析：本题考查均匀分布及其服从均匀分布的随机变量函数的数字特征。

解：设 X 表示该球体的直径，则 $X\sim U[0,6]$，球体的体积为 $Y=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{X}{2}\right)^3$；故球体的体积的平均值为：$E(Y)=E\left[\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{X}{2}\right)^3\right]=\dfrac{\pi}{6}E(X^3)=\dfrac{\pi}{6}\displaystyle\int_0^6\frac{1}{6}x^3\mathrm{d}x=9\pi$。

例 19.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 20）　设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布。

解析：本题考查随机变量函数的分布函数计算方法及均匀分布概念。

证明：根据已知，X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$ 由于 X 的取值为正，故 $0<1-\mathrm{e}^{-2x}<1$，即 $P\{0<Y<1\}=1$。

当 $y\leqslant 0$ 时，Y 的分布函数 $F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，Y 的分布函数 $F_Y(y)=1$；

当 $0<y<1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\geqslant 1-y\}\\&=P\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=y。\end{aligned}$$

因此 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}$，求导后得 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，即 $Y\sim U(0,1)$。

知识点 20　指数分布

更多资源请扫二维码:

20.1　概念、结论

1．概念

定义 20.1.1 指数分布　设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}\quad(\lambda>0)，$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$。

2．结论

结论 20.1.1　设 $X\sim E(\lambda)$，则其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，其数学期望为 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，方差为 $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$。

结论 20.1.2　设 $X\sim E(\lambda)$，则可证明服从指数分布的随机变量 X 具有“无记忆性”：$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$，即服从指数分布的随机变量 X 讨论问题时对先前已使用过的 s 小时没有记忆，因此指数分布常被用作各种“寿命”的分布，如电子元件的使用寿命、动物的寿命、电话的通话时间、顾客在某一系统接受服务的时间等都可以假定服从指数分布，指数分布有着广泛的应用。

结论 20.1.3　在讨论指数分布时，常常会用到以下公式：

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1，\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2，\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=n-1。$$

20.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 18
- **主要题型**：（1）求指数分布的参数或数字特征；（2）求服从指数分布的随机变

量所表示的事件概率；（3）求服从指数分布的随机变量的分布函数或函数的分布及其特征。

● **综述**：指数分布中参数的确定一般需结合题目中的已知条件，利用指数分布公式或其他条件求解；在确定参数的基础上可通过公式计算数字特征；求服从指数分布的随机变量所表示的事件概率等问题，一般可通过公式求解。

20.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 19.3.5

例 20.3.1　（难度系数 0.2）　设顾客在某银行窗口等待服务的时间为 X（单位：分钟），X 服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布。若等待时间超过 10 分钟，他就离开。设他一个月内要来银行 5 次，以 Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律及 $P\{Y \geqslant 1\}$。

解析：首先利用指数分布计算事件 $\{X>10\}$ 发生的概率，然后利用二项分布计算复杂事件的概率。

解：由题意 $Y \sim b(5,p)$，其中 $p=P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2}$，于是 Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=C_5^k(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k}\quad,\quad k=0,1,2,3,4,5\text{。}$$

故

$$P\{Y \geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5 \approx 0.5167\text{。}$$

例 20.3.2　（难度系数 0.4）　甲打电话所花时间 T 服从参数为 λ 的指数分布，已知所花时间超过 2 分钟的概率与不超过 2 分钟的概率相等。当甲打电话时，乙在旁等候，求乙等候时间超过 5 分钟的概率。

解析：本题的关键在于根据已知条件计算指数分布中的参数值，然后代入公式计算即可得出结果。

解：甲打电话所花的时间 T 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}，& x>0,\\ 0, & x \leqslant 0\text{。}\end{cases}$$

又 $P\{T>2\}=P\{T \leqslant 2\}$，即 $\int_2^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$，即 $1-(1-\mathrm{e}^{-2\lambda})=1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}\ln 2$。

乙等候时间超过 5 分钟，即甲打电话所花的时间超过 5 分钟，其概率为

$$P\{T>5\}=\int_5^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-(1-\mathrm{e}^{-5\lambda})=\mathrm{e}^{-5\lambda}=\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\ln 2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\text{。}$$

例 20.3.3 （难度系数 0.6） 某元件的寿命服从参数为 $\dfrac{1}{100}$ 的指数分布，由 5 个这种元件串联组成一个系统，求该系统能够正常工作 100 小时以上的概率。

解析：本题考查服从指数分布的随机变量函数的相关概率计算。

解：设第 i 件元件的寿命为 X_i ，则 $X_i \sim E(\dfrac{1}{100}),\ i=1,2,3,4,5$ ，设系统的寿命为 Y ，系统正常工作则元件均应正常工作，且各元件是否正常工作是相互独立的，故所求概率为

$$P\{Y>100\}=P\{X_1>100, X_2>100,\cdots,X_5>100\}$$
$$=[P\{X_1>100\}]^5=[1-1+\mathrm{e}^{-1}]^5=\mathrm{e}^{-5}\text{。}$$

例 20.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 22，2002 年考研数学三真题） 假设一设备开机后无故障工作时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间为 5 小时；设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机；试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数。

解析：此题有两个随机变量 X 和 Y ，注意两者的区别和联系，Y 是 X 的函数，关键是求此函数的表达式。

解：依题意，$E\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda}=5$ ，因此 $X\sim E\left(\dfrac{1}{5}\right)$，其分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x\geqslant 0\end{cases}$。

由题目所述可知，$Y=\min\{X,2\}$ ，故 Y 的分布函数为 $F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\min\left\{X,2\right\}\leqslant y\right\}$。所以

当 $y\geqslant 2$ 时，$F(y)=P\left\{\min\left\{X,2\right\}\leqslant y\right\}=1$；

当 $y<2$ 时，$F(y)=P\left\{\min\left\{X,2\right\}\leqslant y\right\}=P\left\{X\leqslant y\right\}=F_X(y)=\begin{cases}0, & y<0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2\end{cases}$。

因此 Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}0, & y<0, \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 0\leqslant y<2, \\ 1, & y\geqslant 2\text{。}\end{cases}$

招数 20.3.1 无招胜有招：对最大值（最小值）函数所构成的随机变量的分布，都是直接通过分布函数来求解。

例 20.3.5 （难度系数 0.6，1999 年考研数学一真题） 设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\left\{X,2\right\}$ 的分布函数（　　）。

（A）是连续函数　　　　　（B）至少有两个间断点

（C）是阶梯函数　　　　　（D）恰好有一个间断点

解析：先求服从指数分布的随机变量函数的分布，然后分析函数的间断点。

由题知，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}。$$

X 的取值范围 $(0,+\infty)$，则 $Y=\min\{X,2\}$ 的取值范围为 $(0,2]$。

$Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$。

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$；

当 $0<y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}=P\{X\leqslant y\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$。

所以，$Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0<y<2,\\ 1, & y\geqslant 2。\end{cases}$$

$F_Y(y)$ 仅在 $y=2$ 间断，恰好有一个间断点。故选择（D）。

解：（D）。

例 20.3.6（难度系数 0.6，2004 年考研数学一、三真题）　设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，求 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}$。

解析：本题考查连续型随机变量常见分布有关概率的计算问题。

解：可知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，并且 $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，

因此 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\{X>\dfrac{1}{\lambda}\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1+\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{1}{\lambda}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

知识点 21　正态分布

更多资源请扫二维码：

21.1　概念、定理及结论

1．概念

定义 21.1.1 正态分布　若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$(-\infty<x<+\infty)$，则称 X 服从参数为 μ、σ^2 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$；特别当

$\mu=0$，$\sigma=1$ 时，则称 X 服从标准正态分布，记作 $X\sim N(0,1)$。

2．定理

定理 21.1.1 中心化定理 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

3．结论

结论 21.1.1 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则其概率密度函数 $f(x)$ 具有如下的性质：

（1）$f(x)$ 的图形关于 $x=\mu$ 对称。

（2）当 $x=\mu$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

（3）$f(x)$ 以 x 轴为渐近线。

（4）当 σ 固定、改变 μ 时，$f(x)$ 的图形形状不变，只是图形沿 x 轴平行移动，所以 μ 又称为位置参数。当 μ 固定、改变 σ 时，$f(x)$ 的位置不变，而图形形状发生变化：当 σ 变大时，则 $f(x)$ 图形的形状将变平坦，所以 σ 又称为形状参数。

（5）正态分布的数学期望 $E\left(X\right)=\mu$，方差 $D\left(X\right)=\sigma^2$。

结论 21.1.2 设 $X\sim N(0,1)$，则其概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 为偶函数，其分布函数 $\varPhi(x)$ 是严格单调增加函数，其表达式为 $\varPhi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$；$\varPhi(x)$ 用常规方法不可求解，其值已编制成表，可供查用。

结论 21.1.3 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可通过变换将 $F(x)$ 的计算转化为 $\varPhi(x)$ 的计算，而 $\varPhi(x)$ 的值是可以通过查表得到的。计算公式为

$$P\left\{x_1<X<x_2\right\}=P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma}<X<\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}=\varPhi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\varPhi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)。$$

结论 21.1.4 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，尽管正态分布 X 的取值范围是 $\left(-\infty,+\infty\right)$，但它的值落在区间 $\left(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma\right)$ 的概率为 0.9974，即几乎是“必然事件”，这个性质被称为正态分布的“3σ 规则”。

结论 21.1.5 正态分布是最常见的分布形式，在正常状态下，产品的产量指标、质量指标、测量误差等均服从或者近似服从正态分布；而且根据中心极限定理，正态分布是其他分布的极限分布。

21.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 18
- **主要题型**：（1）确定参数；（2）服从正态分布的随机变量所表示的事件概率计

算；（3）正态分布的应用。

● **综述**：服从正态分布的随机变量所表示的事件概率一般通过中心化定理（定理21.1.1）转化为利用标准正态分布表进行计算；对正态分布中的参数，一般根据已知条件，利用正态分布的概率计算、性质和意义来确定；特别注意服从正态分布的随机变量的线性组合仍为正态分布，且其参数可由线性组合中的系数确定；正态分布是日常生活中最常见的分布，即使针对不服从正态分布的随机变量，其独立同分布的随机变量的和的分布趋于服从正态分布，因此正态分布的应用显得非常重要，其关键是根据所要解决的问题选取适当的随机变量。

21.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 35.3.2，例 43.3.2，例 45.3.7

例 21.3.1（难度系数 0.4）　设随机变量 $X \sim N(108,\ 3^2)$。求：（1）$P\{101.1 < X < 117.6\}$；（2）常数 a，使 $P\{X < a\} = 0.90$；（3）常数 a，使 $P\{|X-a| > a\} = 0.01$。

解析：本题考查服从正态分布的随机变量相关概率的计算。

解：（1）$P\{101.1 < X < 117.6\} = \Phi(\dfrac{117.6-108}{3}) - \Phi(\dfrac{101.1-108}{3}) = \Phi(3\cdot 2) - \Phi(-2\cdot 3)$

$= \Phi(3\cdot 2) + \Phi(2\cdot 3) - 1 = 0.9993 + 0.9893 - 1 = 0.9886$；

（2）$0.90 = P\{X < a\} = \Phi(\dfrac{a-108}{3})$，查表知 $\dfrac{a-108}{3} = 1.28$，所以 $a = 111.84$；

（3）$0.01 = P\{|X-a| > a\} = 1 - P\{|X-a| \leqslant a\} = 1 - P\{0 < X \leqslant 2a\} = 1 - \Phi(\dfrac{2a-108}{3})$。

所以 $\Phi(\dfrac{2a-108}{3}) = 0.99$，查正态分布表知 $\dfrac{2a-108}{3} = 2.33$，故 $a = 57.495$。

招数 21.3.1　无招胜有招：正态分布的概率计算一定要联想到中心化定理（定理21.1.1），最后通过标准正态表得到结果。

例 21.3.2（难度系数 0.4）　设随机变量 $X \sim N(2,2)$，要使 $Y = aX + b \sim N(0,1)$，则在下列各组数中应取（　　）。

（A）$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b = 1$　　　　（B）$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ b = -\sqrt{2}$

（C）$a = \dfrac{1}{2},\ b = -1$　　　　（D）$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ b = \sqrt{2}$

解析：本题考查服从正态分布的随机变量函数的分布。

因 $X \sim N(2,2)$，则 $Y = aX + b \sim N(2a+b, 2a^2)$，要使 $Y = aX + b \sim N(0,1)$，则 $2a^2 = 1$，$a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；$2a + b = 0$，得 $b = -2a = \mp\sqrt{2}$，故选择（B）。

解：（B）。

例 21.3.3 （难度系数 0.6） 某人乘汽车去火车站，有两条路可走：第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 $X \sim N(50,100)$；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间服从概率分布 $Y \sim N(60,16)$。（1）若动身时离火车开车只有 70 分钟，问应走哪条路能乘上火车的把握大些？（2）又若离火车开车时间只有 60 分钟，问应走哪条路乘上火车把握大些？

解析：本题考查服从正态分布的随机变量所表示的事件的概率计算。

解：（1）若走第一条路，$X \sim N(50,100)$，则 $P\{X<70\}=P\{\frac{X-50}{10}<\frac{70-50}{10}\}=\varPhi(2)$。

若走第二条路，$Y \sim N(60,16)$，则 $P\{Y<70\}=P\{\frac{Y-60}{4}<\frac{70-60}{4}\}=\varPhi(2.5)$。由于 $\varPhi(2)<\varPhi(2.5)$，所以走第二条路乘上火车的把握大些。

（2）若 $X \sim N(50,100)$，则 $P\{X<60\}=P\left\{\frac{X-50}{10}<\frac{60-50}{10}\right\}=\varPhi(1)$，若 $Y \sim N(60,16)$，则 $P\{Y<60\}=P\left\{\frac{Y-60}{4}<\frac{60-60}{4}\right\}=\varPhi(0)$。由于 $\varPhi(0)<\varPhi(1)$，所以走第一条路乘上火车的把握大些。

例 21.3.4 （难度系数 0.6） 某科统考成绩近似服从正态分布 $N(70,10^2)$，在参加统考的人中，及格者 100 人（及格分数为 60 分）。（1）求不及格人数；（2）求成绩前 10 名的人数在考生中所占的比例；（3）估计第 10 名考生的成绩。

解析：本题考查服从正态分布的随机变量所表示的事件的概率计算。

解：（1）设某科统考成绩为 X，参加统考的人数为 n，根据已知 $X \sim N(70,10^2)$，则通过率 $\frac{100}{n}=P\{X \geqslant 60\}=1-\varPhi(\frac{60-70}{10})=1-\varPhi(-1)=\varPhi(1)=0.8413$。故 $n \approx 119$，不及格人数为 19。

（2）成绩前 10 名的人数在考生中所占的比例为 $\frac{10}{119} \approx 8.4\%$。

（3）设第 10 名考生的成绩为 a，成绩前 10 名的人数在考生中所占的比例为

$$P\{X \geqslant a\}=1-\varPhi(\frac{a-70}{10})=8.4\%,$$

可得 $\varPhi(\frac{a-70}{10})=0.916$，查表得 $\frac{a-70}{10}=1.38$，于是推出 $a \approx 84$。

例 21.3.5 （难度系数 0.,6） 设随机变量 $X \sim N(0,\sigma^2)$，问当 σ 取何值时，X 落入区间 $(1,3)$ 的概率最大？

解析：先将 σ 当作常数，求随机变量所表示事件的概率，再利用求最值的方法确定参数 σ。

解：因为 $X \sim N(0,\sigma^2)$，则 $P\{1<X<3\}=P\left\{\frac{1}{\sigma}<\frac{X}{\sigma}<\frac{3}{\sigma}\right\}=\varPhi\left(\frac{3}{\sigma}\right)-\varPhi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=g(\sigma)$。

利用《高等数学》中求最值的方法，有

$$g'(\sigma)=(-\frac{3}{\sigma^2})\Phi'(\frac{3}{\sigma})+\frac{1}{\sigma^2}\Phi'(\frac{1}{\sigma})=-\frac{3}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-9/2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}}[1-3\mathrm{e}^{-\frac{8}{2\sigma^2}}]。$$

令 $g'(\sigma)=0$，得 $\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$；又因 $g''(\sigma_0)<0$，故 $\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$ 为极大值点且唯一。

故当 $\sigma=\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$ 时 X 落入区间 $(1,3)$ 的概率最大。

例 21.3.6（难度系数 0.8，2004 年考研数学一、三真题）　设随机变量 $X\sim N(0,1)$，对给定 $\alpha\ (0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于______。

（A）$u_{\frac{\alpha}{2}}$　（B）$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　（C）$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　（D）$u_{1-\alpha}$

解析：本题的关键是：如何用 $P\{|X|<x\}=\alpha$ 推导出 $P\{X>x\}=\alpha$ 的函数。

因为 $P\{|X|<x\}=\alpha$，据标准正态分布图像的对称性，所以 $P\{0<X<x\}=\frac{\alpha}{2}$，另一方面，有

$$P\{0<X<x\}+P\{X\geq x\}=P\{0<X<+\infty\}=\frac{1}{2}。$$

因此 $P\{X>x\}=P\{X\geqslant x\}=\frac{1}{2}-P\{0<X<x\}=\frac{1-\alpha}{2}$，将此式与题设 $P\{|X|<x\}=\alpha$ 比较，故选择（C）。

解：（C）。

例 21.3.7（难度系数 0.6，2006 年考研数学一、三真题）　设随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|\leqslant 1\}>P\{|Y-\mu_2|\leqslant 1\}$，则必有（　）。

（A）$\sigma_1<\sigma_2$　（B）$\sigma_1>\sigma_2$　（C）$\mu_1<\mu_2$　（D）$\mu_1>\mu_2$

解析：本题考查正态分布概率的性质及计算方法。

解：依题意，得 $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，$\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$，则

$$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\},\quad P\{|Y-\mu_2|<1\}=P\left\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\right\}。$$

因为 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，即 $P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\left|\frac{Y-\mu_1}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\right\}$，所以有 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$，即 $\sigma_1<\sigma_2$，故选择（A）。

例 21.3.8（难度系数 0.8，2013 年考研数学一真题） 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，$p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则（ ）。

（A）$p_1 > p_2 > p_3$ （B）$p_2 > p_1 > p_3$ （C）$p_3 > p_1 > p_2$ （D）$p_1 > p_3 > p_2$

解析：本题考查正态分布相关事件概率的判断与计算。

解：$p_1 = P\{-2 \leqslant X_1 \leqslant 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$，

$$p_2 = P\{-2 \leqslant X_2 \leqslant 2\} = P\left\{\frac{-2-0}{2} \leqslant \frac{X_2-0}{2} \leqslant \frac{2-0}{2}\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$p_3 = P\{-2 \leqslant X_3 \leqslant 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \leqslant \frac{X_3-5}{3} \leqslant \frac{2-5}{3}\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1)$$

。比较知 $p_1 > p_2$，由 $p_2 - p_3 = 3\Phi(1) - 1 - \Phi(\frac{7}{3}) > 0$，则 $p_1 > p_2 > p_3$。故选择（A）。

知识点 22 一维随机变量函数的概率分布

更多资源请扫二维码:

22.1 概念、定理及结论

1. 概念

定义 22.1.1 随机变量函数的概率分布 设 X 为随机变量，$g(x)$ 是一个函数，则 $Y = g(X)$ 仍为随机变量，$Y = g(X)$ 的概率分布称为随机变量函数的概率分布。

2. 定理

定理 22.1.1 设 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$，设 $g(x)$ 是严格单调的可导函数，其值域为 (α, β)，其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$，$\beta = \max(g(-\infty)), g(+\infty))$，且 $g'(x) \neq 0$，记 $x = h(y)$ 为 $y = g(x)$ 的反函数，则 $Y = g(X)$ 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

3. 结论

结论 22.1.1 求随机变量函数的概率分布时，首先要区分它是离散型还是连续型随机变量；其次对于离散型随机变量，关键是清楚 $Y = g(X)$ 取哪些值，并求出对应概率，由此写出分布律；对于连续型随机变量，关键是清楚 $Y = g(X)$ 的取值范围，并求出分布

函数或概率密度。

结论 22.1.2　求 $Y=g(X)$ 的概率分布时首先区分随机变量是离散型还是连续型，然后针对不同类型可按以下方法处理：

（1）离散型随机变量，设 X 的分布律为

X	x_1	x_2	…	x_k	…
$p_k=P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	…	p_k	…

记 $y_i=f(x_i)(i=1,2,\cdots)$。如果 $f(x_i)$ 的值全都不相等，那么 Y 的概率分布为

Y	y_1	y_2	…	y_k	…
$P\{Y=y_i\}$	p_1	p_2	…	p_k	…

但是如果 $y_i=f(x_i)$ 的值中有相等的，那么就把这些相等的值合并，并根据概率加法公式把相应的概率相加，便得到 Y 的分布。

（2）连续型随机变量，可采取两种方法：方法一是应用定理 22.1.1 进行求解；方法二是先利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，再利用积分上限函数的求导公式求出 $f_Y(y)$。

结论 22.1.3　若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=aX+b$ 的分布为 $Y\sim N(a\mu+b，a^2\sigma^2)$。

22.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 13，知识点 14，知识点 18
- **主要题型**：（1）求离散型随机变量函数的分布；（2）求连续型随机变量函数的分布；（3）证明随机变量函数的分布类型。
- **综述**：离散型随机变量函数的分布一般先通过代入函数得到随机变量的所有取值，再通过计算概率并合并、整理得其分布律；对连续型随机变量函数的分布，一般通过公式法或求随机变量函数分布函数的方法求解，求解时首先要清楚随机变量函数的取值范围，其次公式法要特别注意函数的单调性及是否符合定理条件；分布函数法在求解中关键在于计算 $P\{g(X)\leqslant y\}$；注意该类题型的解题过程中概率式转化的严谨性。

22.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 20.3.4，　例 34.3.7，　例 38.3.3

例 22.3.1（难度系数 0.6）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0， & 其他。\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

解析：求连续型随机变量函数的概率密度常用公式法，但要注意函数的单调性，不满足单调性的情况下需按单调区间讨论，通过不同单调区间对应的反函数进行求解。

解：函数 $y=\sin x$ 的取值区间为 $[0,1]$，在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加，反函数为 $h_1(y)=\arcsin y$，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调减少，反函数为 $h_2(y)=\pi-\arcsin y$。

依定理 21.1.1 可得 Y 的概率密度函数为：

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=f(\arcsin y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+f(\pi-\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$；

当 $y\leqslant 0$，$y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$；

即
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\arcsin y}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2\pi-2\arcsin y}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0\ , & \text{其他。}\end{cases}$$

例 22.3.2 （难度系数 0.6）设 X 服从参数为 λ 的指数分布，求 $Y=2X^3$ 的概率密度。

解析：求连续型随机变量函数的概率密度常用方法为：先清楚随机变量函数的取值区间，然后求其分布函数，最后通过求导数得概率密度函数。

解：X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，$X$ 的取值范围为 $(0,+\infty)$，$Y=X^3$ 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

$Y=2X^3$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$。

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$，$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^3\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant\sqrt[3]{\frac{y}{2}}\right\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}f(x)\mathrm{d}x$，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f(\sqrt[3]{\frac{y}{2}})\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{\lambda}{3\sqrt[3]{2}}y^{-\frac{2}{3}}e^{-\lambda\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}。$$

所以 $Y=2X^3$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{3\sqrt[3]{2}}y^{-\frac{2}{3}}e^{-\lambda\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

例 22.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 20）　某车站（春节前）规定 1 人最多可买 3 张票，今有甲、乙、丙 3 人结伴买票，他们先各自排队，让先排到者买这 3 人的票，其余 2 人退出排队。设每个队等待时间独立，且都服从均值为 20 分钟的指数分布，记买到 3 张票的等待时间为 Y 分钟。（1）求甲排队时间超过 20 分钟的概率；（2）求 Y 大于 20 的概率；（3）求 Y 的概率密度。

解析：本题考查随机变量表示的事件概率计算和随机变量函数的分布。

解：记甲、乙、丙排队时间分别为 X_1、X_2、X_3 分钟，且 $X_i \sim E(\frac{1}{20})$，X_1、X_2、X_3 相互独立。

（1）$P\{X_1 > 20\} = \int_{20}^{+\infty} \frac{1}{20} \mathrm{e}^{-\frac{x}{20}} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} = 0.3679$。

（2）依题 $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$，故

$P\{Y > 20\} = P\{X_1 > 20, X_2 > 20, X_3 > 20\} = [P\{X_1 > 20\}]^3 = \mathrm{e}^{-3} = 0.0498$。

（3）当 $y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = 1 - [P\{X_1 > y\}]^3 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3y}{20}}$；

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{20} \mathrm{e}^{-\frac{3y}{20}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0。 \end{cases}$

例 22.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 19）　已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调增加的函数，试证 $Y = F(X)$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布。

解析：本题考查（1）分布函数的性质；（2）随机变量函数的概率密度的解法；（3）均匀分布概念。注意这里的“F”扮演了两个角色：$F(x)$ 中的 F 为分布函数，$Y = F(X)$ 中的 F 为随机变量的函数。

解：根据分布函数性质知 $Y = F(X)$ 的取值范围为 $[0,1]$。

设 $Y = F(X)$ 的分布函数 $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\}$。

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = 1$；

当 $0 \leqslant y < 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{F(X) \leqslant y\} = P\left\{X \leqslant F^{-1}(y)\right\} = F(F^{-1}(y)) = y$。

即 $Y = F(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leqslant y < 1 \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$；故 $Y = F(X)$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布。

例 22.3.5（难度系数 0.8，2003 年考研数学三、四真题）　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in [1,8], \\ 0, & \text{其他}。 \end{cases}$

$F(x)$ 是 X 的分布函数。求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数。

解析：本题考查随机变量函数的分布。

解：当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$。

对于 $x\in[1,8]$ ，有 $F(x)=\int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1$。

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数。显然，当 $y\leqslant 0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$；对于 $y\in(0,1)$，有

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y+1)^3\}=F[(y+1)^3]=y\text{。}$$

于是，$Y=F(X)$ 的分布函数为 $G(y)=\begin{cases}0, & 若 y\leqslant 0,\\ y, & 若 0<y<1,\\ 1, & 若 y\geqslant 1。\end{cases}$

招数 22.3.1　怪招：在 $Y=g(X)$ 单调的情况下，求 $P\{g(X)\leqslant y\}$ 一般是借助反函数转化为 $P\{X\leqslant g^{-1}(y)\}$ 进行计算。

例 22.3.6（难度系数 0.8，2013 年考研数学一真题） 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\geqslant 2\end{cases}$。求：（1）$Y$ 的分布函数；（2）概率 $P\{X\leqslant Y\}$。

解析：随机变量 Y 本身是分段函数，两个随机变量的关系不易搞清楚，如果抓住分布函数之间的等价转换关系，并利用该关系求出相应区间的概率，就可得出 Y 的分布函数。

解：（1）设 Y 的分布函数为 $F(y)$，则

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y，X\leqslant 1\}+P\{Y\leqslant y，1<X<2\}+P\{Y\leqslant y，X\geqslant 2\}\\&=P\{2\leqslant y，X\leqslant 1\}+P\{X\leqslant y，1<X<2\}+P\{1\leqslant y，X\geqslant 2\}\end{aligned}$$

当 $y<1$ 时，$F(y)=0$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F(y)=P\{X\leqslant y，1<X<2\}+P\{X\geqslant 2\}=P\{1<X\leqslant y\}+P\{X\geqslant 2\}$

$$=\int_1^y \frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27}(y^3-1)+\frac{1}{27}(3^3-2^3)=\frac{1}{27}(y^3+18)\text{；}$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F(y)=P\{X\leqslant 1\}+P\{1<X<2\}+P\{X\geqslant 2\}=1$。所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ \frac{1}{27}y^3+\frac{2}{3}, & 1\leqslant y<2,\\ 1\ , & y\geqslant 2。\end{cases}$$

（2）$P\{X\leqslant Y\}=1-P\{X>Y\}=1-P\{Y=1\}=1-P\{X\geqslant 2\}=1-\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$。

第 2 篇综合测试题

测试题 A

A2.1　掷一枚质地均匀的骰子，设随机变量 X 为出现的点数，用该随机变量表示下列事件：（1）掷出点数为偶数；（2）掷出的点数小于 3。（知识点 12，难度系数 0.2）

A2.2　设连续型随机变量 X 的分布函数如下，求常数 A 和 B。

$$F(x)=\begin{cases}A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$（知识点 13，难度系数 0.2）

A2.3　设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，则下列结论不正确的是（　）。（知识点 13，难度系数 0.4）

（A）如果 $F(1)=0$，则对任意 $x\leqslant 1$，有 $F(x)=0$

（B）如果 $F(1)=1$，则对任意 $x\geqslant 1$，有 $F(x)=1$

（C）如果 $F(1)=\dfrac{1}{2}$，则 $P\{X\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$

（D）如果 $F(1)=\dfrac{1}{2}$，则 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$

A2.4　设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{A}{N}$，$k=1,2,\cdots,N$，试确定常数 A。（知识点 14，难度系数 0.2）

A2.5　一汽车沿一街道行驶，需通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且每一信号灯红绿两种信号显示的概率均为 $\dfrac{1}{2}$，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求 X 的分布函数。（知识点 14，难度系数 0.4）

A2.6　一批产品有 1000 件，其中有 50 件次品，从中任取 1 件，用 $X=0$ 表示取到次品，$X=1$ 表示取到正品，请写出 X 的分布律。（知识点 15，难度系数 0.2）

A2.7　已知在五重伯努利试验中成功的次数为随机变量 X，且满足 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求 $P\{X=4\}$。（知识点 15，难度系数 0.4）

A2.8　设某射手每次射击命中目标的概率为 0.01，则在 500 次射击中命中目标的最可能次数为______。（知识点 16，难度系数 0.4）

A2.9　某大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，求在同一时刻，（1）恰有 2 个设备被使用的概率；（2）至少有 3 个设备被使用的概率；（3）至多有 3 个设备被使用的概率。（知识点 16，难度系数 0.6）

A2.10　设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为

0.02，且设各飞机降落是相互独立的，试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01（每条跑道只能允许一架飞机降落）？（知识点 16，难度系数 0.6）

A2.11 某地区一个月内发生交通事故的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，根据统计资料可知，一个月内发生 8 次交通事故的概率是发生 10 次交通事故的概率的 2.5 倍，求参数 λ。（知识点 17，难度系数 0.4）

A2.12 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $P\{X=4\}=$____。（知识点 17，难度系数 0.2）

A2.13 电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布，求：（1）每分钟恰有 8 次呼唤的概率；（2）每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。（知识点 17，难度系数 0.4）

A2.14 已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=a\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty$$

求：（1）常数 a；（2）$P\{0<x<1\}$；（3）分布函数 $F(x)$。（知识点 18，难度系数 0.6）

A2.15 设随机变量 X 在区间 $[0,6]$ 上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，求至少有两次的观测值大于 2 的概率。（知识点 19，难度系数 0.6，跨知识点综合题）

A2.16 设随机变量 $X\sim U[0,\ 6]$，求方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率。（知识点 19，难度系数 0.6）

A2.17 某电子元件的寿命 X（小时）服从指数分布，其概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）此元件寿命至少在 200 小时以上的概率；（2）将 3 只这种元件连接成为一个系统，且至少 2 只元件失效时系统失效，又设 3 只元件工作相互独立，求系统的寿命至少为 200 小时的概率。（知识点 20，难度系数 0.4）

A2.18 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，X 的分布函数为 $\varPhi(x)$，则 $P\{|X|>1\}$ 的值为（ ）。（知识点 21，难度系数 0.2）

（A）$2[1-\varPhi(1)]$ （B）$2\varPhi(1)-1$ （C）$2-\varPhi(1)$ （D）$1-2\varPhi(1)$

A2.19 测量某一目标的距离时发生的误差 $\xi(m)$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-20)^2}{3200}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求在 3 次这样的测量中至少有 1 次误差的绝对值不超过 30 米的概率。（知识点 21，难度系数 0.6）

A2.20 设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，求 $Y=X^2+1$ 的分布律。（知识点 22，难度系数 0.2）

A2.21　已知随机变量 $X \sim U(0,1)$，$Y = 3X + 1$，求 Y 的概率密度函数。（知识点 22，难度系数 0.4）

A2.22　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0。\end{cases}$$

求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度函数。（知识点 22，难度系数 0.6，1995 年考研数学一真题）

测试题 B

B2.1　设试验为从装有 5 个黑球、2 个白球的袋中，每次任取一个球，取后不放回，直到取到所有的白球为止，写出该随机试验中产生的两个随机变量。（知识点 12，难度系数 0.4）

B2.2　设随机变量 X 的分布函数如下：试填上（1）（2）（3）项。

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x < \underline{\ (1)\ }, \\ \underline{\ (2)\ }, & x \geqslant \underline{\ (3)\ }。\end{cases}$$（知识点 13，难度系数 0.8）

B2.3　一汽车沿一街道行驶，需要通过三个设有红绿灯的路口，各不同路口灯的显示情况相互独立，且每个路口上红、绿灯显示的时间比为 1∶2，以 X 表示该汽车驶过这条街道途中所遇到的红灯数，求随机变量 X 的分布函数。（知识点 12、13，难度系 0.8）

B2.4　下列函数能作为分布函数的是（　　）。（知识点 13，难度系数 0.6）

（A）$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x, & 0 \leqslant x < \pi \\ 1, & x \geqslant \pi \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x+\pi}{2\pi}, & 0 \leqslant x < \pi \\ 1, & x \geqslant \pi \end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x, & 0 \leqslant x < \pi \\ 1, & x \geqslant \pi \end{cases}$

B2.5　在 10 件产品中有 3 件次品，现从中任意抽取出 2 件，求抽到次品数 X 的分布律和 $0 < X \leqslant 2$ 与 $0 \leqslant X < 2$ 的概率。（知识点 14，难度系数 0.6）

B2.6　甲、乙两人从装有 5 个红球与 6 个白球的口袋中轮流摸取一球，甲先取，乙后取，每次取后不放回，直到两人中有一人取到红球时停止，试求取球次数的分布律和甲先取到红球的概率。（知识点 8、14，难度系数 1.0）

B2.7　同时掷两枚骰子，直到一枚骰子出现 6 点为止，求抛掷次数 X 的分布律。（知识点 15，难度系数 0.6）

B2.8　设 X 是只取自然数值的离散型随机变量，若 X 的分布具有无记忆性，即对任意自然数 n、m，都有 $P\{X > n + m \mid X > m\} = P\{X > n\}$，则 X 的分布一定是几何分布。

（知识点 7、15，难度系数 0.8）

B2.9 在某公共汽车站，甲、乙、丙三人分别独立地等 1、2、3 路汽车，设每个人等车时间（分钟）均服从[0,5]上的均匀分布，求 3 人中至少有两个人等车时间不超过 2 分钟的概率。（知识点 16，难度系数 0.6）

B2.10 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击之后，其中恰好第 2 次命中目标的概率为（ ）。（知识点 16，难度系数 0.6，2007 年考研数学一、三真题）

（A）$3p(1-p)^2$ （B）$6p(1-p)^2$ （C）$3p^2(1-p)^2$ （D）$6p^2(1-p)^2$

B2.11 某商店每月销售某种商品的数量服从参数为 5 的泊松分布，问在月初至少库存多少此种商品，才能保证当月不脱销的概率为 0.99977 以上。（知识点 17，难度系数 0.8）

B2.12 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。（1）求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；（2）求在设备已无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率。（知识点 13、17，难度系数 0.8）

B2.13 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} c\sin x, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）使 $P(X>a)=P(X<a)$ 成立的 a.（知识点 18，难度系数 0.8）

B2.14 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，若 X 与 $-X$ 有相同的分布函数，则（ ）。（知识点 18，难度系数 0.6）

（A）$F(x)=F(-x)$ （B）$F(x)=-F(-x)$ （C）$f(x)=f(-x)$ （D）$f(x)=-f(-x)$

B2.15 设 $F_1(x)$、$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（ ）。（知识点 18，难度系数 0.8，2011 年考研数学一真题）

（A）$f_1(x)f_2(x)$ （B）$2f_2(x)F_1(x)$ （C）$f_1(x)F_2(x)$ （D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

B2.16 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2\xi x_2x_3$，其中 ξ 在区间[0,5]上服从均匀分布，求此二次型为正定二次型的概率。（知识点 19，难度系数 0.8，跨线性代数知识点）

B2.17 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，试求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的分布函数及概率密度函数。（知识点 19、22，难度系数 0.6）

B2.18 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} c\mathrm{e}^{-x} & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0。 \end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）分布函数 $F(x)$；（3）$Y=2X+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$。（知识点 20、22，难度系数 0.8）

B2.19 设 $X\sim E(1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。（知识点 20、22，难度系数 0.8）

B2.20 在电源电压不超过 200V、200～240V 和超过能 240V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1、0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,\ 25^2)$，试求：（1）该电子元件损坏的概率 α；（2）该电子元件损坏时，电源电压在 200～240V

的概率 β。（知识点 21，难度系数 0.8）

B2.21　设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $y^2+4y+X=0$ 二次方程无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，求参数 μ。（知识点 21，难度系数 0.8，2002 年考研数学一真题）

B2.22　设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0 \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}$ $(a>0，b>0)$ 为概率密度，则 a、b 应满足（　）。（知识点 21，难度系数 0.8，2010 年考研数学一真题）

（A）$2a+3b=4$　　（B）$3a+2b=4$　　（C）$a+b=1$　　（D）$a+b=2$

B2.23　设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数与概率密度函数。（知识点 22，难度系数 0.8）

B2.24 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$，$(i=1,2)$。（1）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（2）求 $E(Y)$。（知识点 22，难度系数 1.0，2014 年考研数学一真题）

第 2 篇综合测试题详解

测试题 A 答案

A2.1 解析：用随机变量表示事件是处理概率问题的基础。

解：随机变量 X 的取值为 $1,2,3,4,5,6$。

（1）掷出点数为偶数的事件为 $A=\{X=2\}+\{X=4\}+\{X=6\}$；

（2）掷出点数小于 3 的事件 $B=\{X=1\}+\{X=2\}$。

A2.2 解析：本题考查分布函数的概念及性质。

解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$，可知 $A=1$。再由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性可知

$$0=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0+0}(A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=A+B，故 B=-A=-1。$$

A2.3 解析：本题考查分布函数的概念及性质。

由于 $F(x)$ 是单调不减函数，且 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，故（A）、（B）成立；

由于 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，所以 $P\{X\leqslant 1\}=F(1)=\frac{1}{2}$，故（C）成立；

因为 $P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X \leqslant 1\} + P\{X = 1\} = 1 - F(1) + P\{X = 1\} = \dfrac{1}{2} + P\{X = 1\}$，所以（D）结论不正确。选择（D）。

解：（D）。

A2.4 解析： 本题考查离散型随机变量分布律的性质。

解： 由分布律的性质可知 $1 = \sum\limits_{k=1}^{N} P(X = k) = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{A}{N} = \dfrac{A}{N} \cdot N = A$，因此 $A = 1$，故 X 的分布律为 $P(X = k) = \dfrac{1}{N}$，$k = 1, 2, \cdots, N$。此分布常称为离散型的均匀分布。

A2.5 解析： 求离散型随机变量的分布律关键在于两点:（1）随机变量的所有可能取值;（2）随机变量取所有可能值（事件）的概率。本题的概率通过分解为事件的积，然后用乘法公式结合独立性计算。

解： 设 A_i 表示第i个路口遇到红灯，依题可知，A_1、A_2、A_3 相互独立，$P(A_i) = \dfrac{1}{2}$，$i = 1, 2, 3$，随机变量 X 的取值为 $0, 1, 2, 3$，因此

$$P\{X = 0\} = P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P\{X = 1\} = P(\overline{A_1} A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X = 2\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad P\{X = 3\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

故 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0.75, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0.875, & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3。 \end{cases}$

A2.6 解析： 此题求离散型随机变量在单个点的值，归于古典概型。

解： X 的分布律为 $P\{X = 0\} = \dfrac{C_{50}^{1}}{C_{1000}^{1}} = \dfrac{1}{20}$；$P\{X = 1\} = \dfrac{C_{950}^{1}}{C_{1000}^{1}} = \dfrac{19}{20}$。

A2.7 解析: 二项分布可以看作若干个相互独立的 0-1 分布的随机变量的和。

解： 设在每次试验中成功的概率为 p，则 $X \sim b(5, p)$。

由 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$，即 $C_5^1 p(1-p)^4 = C_5^2 p^2 (1-p)^3$，解得 $p = \dfrac{1}{3}$，所以 $P(X = 4) = C_5^4 (\dfrac{1}{3})^4 \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{243}$。

A2.8 解析： 本题考查二项分布的概念及其概率运算。

解： 由题可知 500 次射击中命中目标的次数 $X \sim b(500, 0.01)$，则其数学期望为

$$np = 500 \times 0.01 = 5,$$

因此命中目标的最可能次数为 $np = 5$。

A2.9 解析：本题考查二项分布中事件概率的计算。

解：设 X 表示 5 个设备中被使用的设备数，则 $X \sim b(5, 0.1)$。

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是

$$P\{X=2\}=C_5^2 p^2 q^{5-2}=C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3=0.0729 \text{。}$$

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是

$$P\{X \geqslant 3\}=C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2+C_5^4 \times (0.1)^4 \times (0.9)+C_5^5 \times (0.1)^5=0.00856 \text{。}$$

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是

$$P\{X \leqslant 3\}=C_5^0 (0.9)^5+C_5^1 \times 0.1 \times (0.9)^4+C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3+C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2=0.99954$$

A2.10 解析：对参数 n 较大的二项分布 $b(n,p)$，常用泊松定理作近似计算。

解：设 X 为某一时刻需立即降落的飞机数，则 $X \sim b(200, 0.02)$；设机场需配备 N 条跑道才能满足题目要求，则有 $P(X>N)<0.01$，即 $\sum\limits_{k=N+1}^{200} C_{200}^k (0.02)^k (0.98)^{200-k}<0.01$。利用泊松定理进行近似计算 $\lambda=np=200 \times 0.02=4$，$P(X \geqslant N)=\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-4} 4^k}{k!}<0.01$，查泊松分布表得 $N \geqslant 9$，故机场至少应配备 9 条跑道。

A2.11 解析：本题考查泊松分布的概念。

解：设某地区一个月内发生交通事故的次数为 X，则 $X \sim P(\lambda)$，且 $P\{X=8\}=2.5P\{X=10\}$，即 $\dfrac{\lambda^8}{8!}\mathrm{e}^{-\lambda}=2.5 \cdot \dfrac{\lambda^{10}}{10!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，解得 $\lambda=6$。

A2.12 解析：本题考查泊松分布的概念。关键是确定参数 λ。

解：X 服从泊松分布，则 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0,1,2\cdots$ 由 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，即 $\dfrac{\lambda}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，解得 $\lambda=2$，故 $P\{X=4\}=\dfrac{2^4}{4!}\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2}$。

A2.13 解析：本题考查利用泊松分布表计算服从泊松分布的随机变量所表示的事件概率。

解：（1）方法一（直接计算）。$P(X=8)=\dfrac{4^8}{8!}\mathrm{e}^{-4}=0.029771$。

方法二（查泊松分布表）。$P\{X \geqslant 8\}-P\{X \geqslant 9\}=0.051134-0.021363=0.029771$。

（2）每分钟的呼唤次数大于 10 的概率为 $P\{X>10\}=P\{X \geqslant 11\}=0.002840$。

A2.14 解析：本题考查连续型随机变量概率密度的性质以及概率密度与分布函数之间的关系。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，即 $1=\int_{-\infty}^{\infty} a\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty} a\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2a$，得 $a=\dfrac{1}{2}$。

（2） $P\{0<X<1\}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$ 。

（3）当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$ 。

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ 。故 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

A2.15 解析：均匀分布常结合其他分布综合计算事件发生的概率。注意这里有两个随机变量。

解：由于 $X\sim U[0,6]$，即 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 0\leqslant x\leqslant 6\\ 0, & 其他\end{cases}$ 。所以有

$$P(X>2)=\int_2^6\frac{1}{6}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}。$$

设 Y 为 3 次观测中观测值大于 3 的次数，则 $Y\sim b(3,\frac{2}{3})$ ，所求概率为

$$P(Y\geqslant 2)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{20}{27}。$$

A2.16 解析：根据题目条件给出随机变量取值范围，再利用均匀分布计算事件发生的概率。

解：设 A 为“方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根”，则根据一元二次方程根的判断有 $X^2-4\geqslant 0$ ，即 $|X|\geqslant 2$ ，又因为 $X\sim U[0,6]$ ，即 $X\in[0,6]$，所以 A 发生 $\Leftrightarrow X\geqslant 2$ ，故

$$P(A)=P\{X>2\}=\frac{6-2}{6-0}=\frac{2}{3}。$$

A2.17 解析：首先利用指数分布计算事件发生的概率，其次利用二项分布计算复杂事件的概率。

解：（1） $P\{X\geqslant 200\}=1-P\{0<X<200\}=1-\int_0^{200}\frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{X}{100}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}$ 。

（2）设 Y 为系统中寿命至少为 200 小时的元件个数，则 $Y\sim b(3,\mathrm{e}^{-2})$，所以

$$P\{\boldsymbol{Y}\geqslant 2\}=C_3^2(\mathrm{e}^{-2})^2(1-\mathrm{e}^{-2})+(\mathrm{e}^{-2})^3=3\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-6}。$$

A2.18 解析：本题考查服从正态分布的随机变量所表示的事件的概率计算。

因 $X\sim N(0,1)$ ，所以

$$\begin{aligned}P\{|Y|>1\}&=1-P\{|X|\leqslant 1\}=1-P\{-1<X\leqslant 1\}\\&=1-\Phi(1)+\Phi(-1)=1-[2\Phi(1)-1]=2[1-\Phi(1)]。\end{aligned}$$

故选择（A）。

解：（A）。

A2.19 解析：先用正态分布计算一次测量中误差的绝对值不超过 30 米的概率，再利用二项分布计算所求事件的概率。

解：依题意，测量误差$\xi \sim N(20,40^2)$，在一次测量中误差的绝对值不超过30米的概率为

$$P\left\{|\xi| \leqslant 30\right\} = P\left\{\frac{-30-20}{40} \leqslant \frac{\xi-20}{40} \leqslant \frac{30-20}{40}\right\} = \Phi(0.25) - \Phi(-1.25)$$

$$= \Phi(0.25) - 1 + \Phi(1.25) = 0.5897 - 1 + 0.8944 = 0.4841 。$$

设η表示在3次测量中事件$\left\{|\xi| \leqslant 30\right\}$出现的次数，则$\eta \sim b(3, 0.4841)$。因此所求概率为

$$P\{\eta \geqslant 1\} = 1 - P\{\eta = 0\} = 1 - (1 - 0.4841)^3 = 1 - 0.1373 = 0.8627 。$$

A2.20 解析：对于离散型随机变量函数的分布律，应首先确定该随机变量的取值，然后求随机变量取每个值的概率；注意对应函数值相同的概率要全部累加在一起。

解：因为X的可能值为−1、0、1，所以 $Y = X^2 + 1$的可能值为 1、2，因此

$$P\{Y=1\} = P\{X=0\} = \frac{1}{4}，\ P\{Y=2\} = P\{X=-1\} + P\{X=1\} = \frac{3}{4} 。$$

故$Y = X^2 + 1$的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$。

A2.21 解析：这是求随机变量函数的概率密度，先通过概率的对应求其分布函数，最后通过求导数得概率密度函数。

解：已知$X \sim U(0,1)$，则其概率密度函数为$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他。 \end{cases}$ 根据$Y = 3X + 1$，则其取值区间为$(1,4)$。设Y的分布函数为$F_Y(y)$，则

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{3X + 1 \leqslant y\} = P\{X \leqslant \frac{y-1}{3}\} = F_X\left(\frac{y-1}{3}\right)。$$

因此Y的概率密度函数为：$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-1}{3}\right) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 < y < 4, \\ 0, & 其他。 \end{cases}$

A2.22 解析：本题考查随机变量函数的分布。

解：因为 X 的取值范围为$(0,+\infty)$，所以$Y = \mathrm{e}^X$ 的取值范围为$[1,+\infty)$。

当$y \leqslant 1$时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 0$；

当$y > 1$时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\mathrm{e}^X \leqslant y\} = P\{X \leqslant \ln y\} = \int_0^{\ln y} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{y}$。

即$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y}, & y>1 \\ 0, & y \leqslant 1 \end{cases}$，故其概率密度为$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y>1, \\ 0, & y \leqslant 1。 \end{cases}$

测试题 B 答案

B2.1 解析：同一个随机试验中可以构造多个随机变量，随机变量的给定取决于试验的目的和需要解决的问题。

解：设 X 表示试验中取出的黑球个数，则 X 为随机变量，其取值为 $0,1,2,3,4,5$；设 Y 表示试验中取出球的个数，则 Y 也为随机变量，其取值为 $2,3,4,5,6,7$。

B2.2　解析：本题考查分布函数的概念及性质。

解：由 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ 知（2）填 1。

由分布函数的右连续性 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)=1$ 知 $x_0=0$，故（1）填 0。从而（3）亦填 0.即 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0。\end{cases}$

B2.3　解析：要求分布函数，一般可通过先求随机变量的分布律或概率密度，再计算得其分布函数。除此以外，按分布函数的定义也可求事件发生的概率。

解：该汽车驶过这条街道途中所遇到的红灯数 $X\sim b(3,\dfrac{1}{3})$，X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_3^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{3-k},\ (k=0,1,2,3)。$$

故所求随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{8}{27}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{20}{27}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{26}{27}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3。\end{cases}$

B2.4 解析：本题考查分布函数的概念及性质。

解：由分布函数的右连续性知，（A）不成立；由 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$ 知，（B）不成立；分布函数 $F(x)$ 是单调不减的函数，故（D）不成立；而（C）中 $F(x)$ 是单调不减的函数，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，而且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1,\ F(x)$ 是右连续的，故（C）为某随机变量的分布函数。选择（C）。

B2.5　解析：本题考查离散型随机变量的分布律的求解方法。

解：由题意知，X 的所有可能取值为 0、1、2。

$X=0$ 表示“没有抽到次品”，有 $P\{X=0\}=\dfrac{C_7^2}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$；

$X=1$ 表示“抽到 1 件次品”，有 $P\{X=1\}=\dfrac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$；

$X=2$ 表示“抽到 2 件次品”，有 $P\{X=2\}=\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$。

因而 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\dfrac{7}{15}$，$P\{X=1\}=\dfrac{7}{15}$，$P\{X=2\}=\dfrac{1}{15}$，所以

$$P\{0<X\leqslant 2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15};$$

$$P\{0\leqslant X<2\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{14}{15}。$$

B2.6　解析：本题考查离散型随机变量的分布律的求解。注意一定要写全随机变量的取值。

解：令 X 表示取球次数，则 X 的可能取值为 $X=1,2,\cdots,7$；取每个值的概率为

$$P\left\{X=1\right\}=\frac{5}{11}，\ P\left\{X=2\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}=\frac{6}{22}，\ P\left\{X=3\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{33}，$$

$$P\left\{X=4\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{66}，\ P\left\{X=5\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{154}，$$

$$P\left\{X=6\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{462}，\ P\left\{X=7\right\}=\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{462}。$$

则随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5	6	7
$P\left\{X=i\right\}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{154}$	$\frac{5}{462}$	$\frac{1}{462}$

甲先取到红球的概率为 $P\left\{X=1\right\}+P\left\{X=3\right\}+P\left\{X=5\right\}+P\left\{X=7\right\}=\dfrac{296}{462}$。

B2.7 解析：本题考查几何分布概念及事件概率计算。

解：设 A_i 为“第 i 枚骰子出现 6 点”，$i=1,2$，则 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{6}$，且 A_1、A_2 相互独立，再设 $C=\{$两枚骰子出现 6 点$\}$。则

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{36}。$$

故抛掷次数 X 服从参数为 $\dfrac{11}{36}$ 的几何分布，即 $P\left\{X=k\right\}=(\dfrac{25}{36})^{k-1}\dfrac{11}{36},\quad(k=1,2,\cdots)$。

B2.8　解析：本题考查概率计算及几何分布概念及性质。

证明：由几何分布的无记忆性，即 $P\{X>n+m\mid X>m\}=\dfrac{P\{X>n+m\}}{P\{X>m\}}=P\{X>n\}$，得

$$P\{X>n+m\}=P\{X>n\}P\{X>m\}\tag{2.8.1}$$

将式（2.8.1）中的 n 换成 $n-1$，得 $P\{X>n+m-1\}=P\{X>n-1\}P\{X>m\}$　（2.8.2）

式（2.8.1）～式（2.8.2）得

$$P\{X=n+m\}=P\{X=n\}P\{X>m\}。$$

设 $P\{X=1\}=p$，下面用数学归纳法证明：$P\{X=t\}=p(1-p)^{t-1}$，$t=1,2,\cdots$

（1）当 t=1 时，$P\{X=1\}=p=p(1-p)^0$，结论成立。

（2）设 t=k 时，结论成立，即 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$，则可得

$$P\{X=k+1\}=P\{X=k\}P\{X>1\}=p(1-p)^k，k=0,1,2,\cdots$$

因此 t=k+1 时，结论成立。由数学归纳法可得 $P\{X=t\}=p(1-p)^{t-1}$，$t=1,2,\cdots$ 即 X 的分布是几何分布。

B2.9　解析：这是二项分布与均匀分布的综合题型。此题无需列出均匀分布的分布函数，只需要根据其特点即可求出对应的概率。

解：每个人等车时间 X（分钟）均服从 $[0,5]$ 上的均匀分布。若设等车时间不超过 2 分钟的人数为 Y，则 $Y\sim \mathrm{b}(3,p)$，其中 $p=P\left\{X\leqslant 2\right\}=\dfrac{2}{5}$，所求概率为

$$P\left\{Y\geqslant 2\right\}=P\left\{Y=2\right\}+P\left\{Y=3\right\}=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{44}{125}。$$

B2.10　解析：本题主要考查独立重复试验情况下的概率计算。

由于此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标，则前 3 次射击中只有一次命中目标，所以所求概率为 $C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$，故选择（C）。

解：（C）。

B2.11　解析：本题考查泊松分布的概率计算。

解：设 X 为该商品的销售量，则 $X\sim P(5)$，设 N 为库存量，由题意得

$$0.99977\leqslant P(X\leqslant N)=1-P(X>N)=1-\sum_{K=N+1}^{\infty}P(X=K)=1-\sum_{K=N+1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}，$$

即 $\displaystyle\sum_{K=N+1}^{\infty}\frac{5^K}{k!}\mathrm{e}^{-5}\leqslant 0.00023$，查泊松分布表知 $N+1=15$，故月初要库存 14 件以上，才能保证当月不脱销的概率在 0.99977 以上。

B2.12　解析：本题考查随机变量分布函数及条件概率的计算。

解：（1）设两次故障之间时间间隔 T 的分布函数为 $F_T(t)$，故障的次数 $N(t)\sim P(\lambda t)$，则 $F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}$。事件 $\{T>t\}$ 表示两次故障的间隔时间超过 t，也就是说在时间 t 内没有发生故障，故 $N(t)=0$，于是

$$F_T(t)=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}，\ t>0。$$

可见，T 的分布函数为 $F_T(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0\\ 0\ , & t\leqslant 0\end{cases}$，即 T 服从参数为 λ 的指数分布。

（2）$P\{T\geqslant 16|T\geqslant 8\}=\dfrac{P\{T\geqslant 16,\ T\geqslant 8\}}{P\{T\geqslant 8\}}=\dfrac{P\{T\geqslant 16\}}{P\{T\geqslant 8\}}=\dfrac{1-(1-e^{-16\lambda})}{1-(1-e^{-8\lambda})}=e^{-8\lambda}$。

B2.13 解析：本题考查概率密度性质及利用概率密度计算事件的概率。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=c\int_0^{\pi}\sin x dx=-c\cos x\Big|_0^{\pi}=2c$，$c=\dfrac{1}{2}$。

（2）$P(X>a)=\int_a^{\pi}\dfrac{1}{2}\sin x dx=-\dfrac{1}{2}\cos x\Big|_a^{\pi}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos a$，

$P(X<a)=\int_0^{a}\dfrac{1}{2}\sin x dx=-\dfrac{1}{2}\cos x\Big|_0^{a}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos a$，

由 $P(X>a)=P(X<a)$，得 $\cos a=0$，所以 $a=\dfrac{\pi}{2}$。

B2.14 解析：本题考查两个随机变量的分布函数的关系。概念要清楚，要注意“X”与“x”的区别，否则容易混淆。

解：由题设知 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{-X\leqslant x\}$，而 $F(-x)=P\{X\leqslant -x\}=P\{-X\geqslant x\}=1-P\{-X<x\}=1-F(x)$，求导得 $F'(-x)\cdot(-1)=-F'(x)$，即 $F'(-x)=F'(x)$，所以 $f(x)=f(-x)$。故选择（C）。

B2.15 解析：本题考查随机变量分布函数及概率密度的性质。由题设知

（1）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_1(x)F_2(x)]'dx=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$。

所以 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 可为概率密度函数，故选择（D）。

解：（D）。

B2.16 解析：先利用题目条件求出随机变量取值范围，再利用均匀分布计算事件的概率。

解：ξ 在区间 $[0,5]$ 上服从均匀分布，其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\xi x_2x_3$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&\xi\\0&\xi&1\end{pmatrix}$，此二次型为正定二次型的充分必要条件是矩阵 A 的各阶顺序主子式全大于零，即

$$\Delta_1=2>0,\ \Delta_2=2>0,\ \Delta_3=2(1-\xi^2)>0。$$

故此二次型为正定二次型的概率是

$$P\{1-\xi^2>0\}=P\{-1<\xi<1\}=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{5}\,dx=0.2。$$

B2.17 解析：本题考查服从均匀分布的随机变量函数的分布函数及概率密度的计算。

解：由于$0<X<1$，故 $1<Y=\mathrm{e}^X<\mathrm{e}$。

当$y\leqslant 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当$1<y<\mathrm{e}$时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^X\leqslant y\}=P\{X\leqslant \ln y\}=\int_0^{\ln y}\mathrm{d}x=\ln y$；

当$y\geqslant \mathrm{e}$时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^X\leqslant y\}=1$。

即$Y=\mathrm{e}^X$的分布函数为$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ \ln y, & 1<y<\mathrm{e},\\ 1, & y\geqslant \mathrm{e};\end{cases}$概率密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e},\\ 0, & 其他。\end{cases}$

B2.18 解析：本题考查指数分布的分布函数及相应随机变量函数的概率密度计算。

解：（1）由概率密度的性质，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，可得$\int_0^{+\infty}c\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=c=1$。

（2）X的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0。\end{cases}$$

（3）$Y=2X+1$的取值范围为$Y>1$，其分布函数

$$F_Y(y)=P\{2X+1<y\}=P\{X<\frac{y-1}{2}\}$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{y-1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & y>1\\ 0, & y\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1。\end{cases}$$

$Y=2X+1$的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1。\end{cases}$

B2.19 解析：本题考查随机变量函数的概率密度的计算，应先求分布函数。

解：由题知，随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，分别记$X$、$Y$的分布函数为$F_X(x)$、$F_Y(y)$。

由于$Y=X^2\geqslant 0$，故当$y\leqslant 0$时，$F_Y(y)=0$；

当$Y=X^2>0$时，有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant \sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}。$$

对$F_Y(y)$求导，即得Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}})'=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}(-\sqrt{y})'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

B2.20 解析：利用正态分布及全概率公式计算事件的概率。

解：设 A 表示“电子元件损坏”，B_i 表示“电源电压在第 i 档”，$i=1,2,3$。

（1）$\alpha=P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$$=P(X\leqslant 200)\times 0.1+P(200<X\leqslant 240)\times 0.001+P(X>240)\times 0.2$$

$$=\varPhi\left(\frac{200-220}{25}\right)\times 0.1+\left[\varPhi(\frac{240-220}{25})-\varPhi(\frac{200-220}{25})\right]\times 0.001$$

$$+\left[1-\varPhi\left(\frac{240-220}{25}\right)\right]\times 0.2$$

$$=\varPhi\left(-\frac{20}{25}\right)\times 0.1+\left[\varPhi\left(\frac{20}{25}\right)-\varPhi\left(-\frac{20}{25}\right)\right]\times 0.001+\left[1-\varPhi\left(\frac{20}{25}\right)\right]\times 0.2$$

$$=(1-0.7881)\times 0.1+(2\times 0.7881-1)\times 0.001+(1-0.7881)\times 0.2=0.0641。$$

（2）$\beta=P(B_2\,|\,A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{0.0641}=\dfrac{0.005756}{0.0641}=0.0898$。

B2.21 解析：先根据条件求出随机变量的取值范围，再利用正态分布的概率计算相关参数。

解：二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $\varDelta=16-4X<0$，

$$P\{\varDelta<0\}=P\{16-4X<0\}=P\{X>4\}=1-\varPhi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2},$$

即 $\varPhi\left(\dfrac{4-\mu}{\sigma}\right)=0.5=\varPhi(0)$，故 $\dfrac{4-\mu}{\sigma}=0$，$\mu=4$。

B2.22 解析：本题考查概率密度函数的概念、性质及计算方法。

解：由条件知

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}，\quad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1<x<3,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

若 $f(x)$ 为概率密度，则 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}bf_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0 af_1(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{4}b$。故选择（A）。

B2.23 解析：求连续型随机变量函数的概率密度的常用方法是先清楚随机变量函数的取值区间，然后求其分布函数，最后通过求导数得概率密度函数。

解：因 X 的取值范围为 $(-1,1)$，所以 $Y=X^2+1$ 的取值范围为 $[1,2)$。$Y=X^2+1$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$。

当 $y \leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y \geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $1<y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y \leqslant y\}=P\{X^2+1 \leqslant y\}=P\{-\sqrt{y-1} \leqslant X \leqslant \sqrt{y-1}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} (1-|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\mathrm{d}x=2\sqrt{y-1}-(y-1)\text{。}$$

所以 $Y=X^2+1$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

B2.24 解析：本题考查随机变量函数的分布及数学期望的计算。

解：（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(\mathrm{y})$，则

$$F_Y(y)=P\{Y \leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y \leqslant y \mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y \leqslant y \mid X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y \leqslant y \mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y \leqslant y \mid X=2\}\text{。}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0 \leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(y+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}$；

当 $1 \leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(1+\frac{y}{2})$；当 $y \geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$。所以 Y 的分布函数为

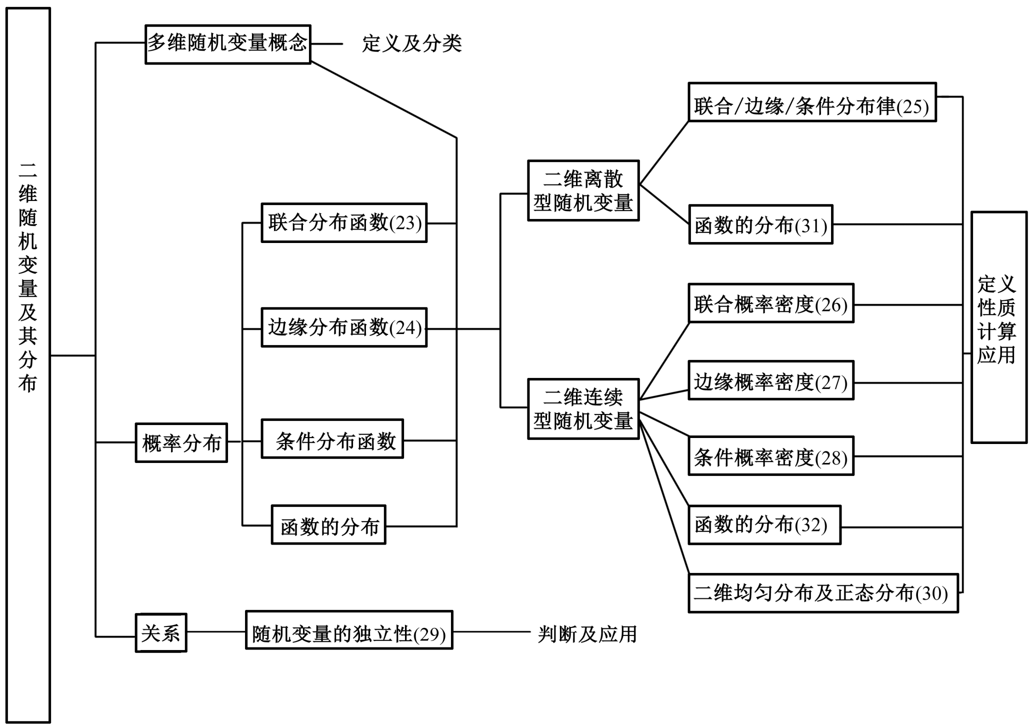
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0, \\ \dfrac{3y}{4}, & 0 \leqslant y<1, \\ \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{2}), & 1 \leqslant y<2, \\ 1, & y \geqslant 2\text{。}\end{cases}$$

（2）Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1, \\ \dfrac{1}{4}, & 1 \leqslant y<2, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 y\frac{3}{4}\mathrm{d}y+\int_1^2 y\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}\text{。}$$

第 3 篇　多维随机变量及其分布

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 3 篇

综　述

更多资源请扫二维码:

将一维随机变量的概念推广可得多维随机变量。在多维随机变量中，重点讨论二维随机变量，二维随机变量并不是两个随机变量的简单组合，因为它们之间往往相互联系，所以需要全面地进行研究，掌握二维随机变量的研究方法之后即可很自然地将结论推广到多维随机变量。

对二维随机变量，首先将它作为一个整体进行讨论，主要内容包括联合分布函数(23)、联合概率密度(26)及联合分布律。其次对单个随机变量进行讨论，主要内容包括边缘分布函数(24)、边缘概率密度(27)及边缘分布律(25)；由联合概率密度可以求边缘概率密度，但由边缘概率密度不一定能求联合概率密度。最后对两个随机变量的关系进行讨论，一方面讨论两个随机变量之间相关的情况，主要内容包括条件概率密度(28)和条件分布函数(25)，其中连续型随机变量的条件分布是难点；另一方面讨论两个随机变量之间独立的情况，主要内容包括随机变量相互独立性的判断和应用(29)。对上述内容大家必须结合第 1 篇的基本概念及多元函数微积分的计算方法来掌握其性质及计算，如连续型随机变量的联合概率密度与分布函数之间可以通过求二重积分与求两次偏导来转化。特别对连续型的二维随机变量，必须掌握二维均匀分布和了解二维正态分布(30)。

二维随机变量的函数同样还是随机变量，离散型二维随机变量函数的分布(31)相对容易些，而连续型二维随机变量函数的分布(32)的计算则相对较难，需要扎实的高等数学重积分的分析以及计算方法作为基础，大家只需掌握一些简单的二维随机变量函数的分布，如二维随机变量的和、差或线性函数的分布。

注：文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 23　二维随机变量的联合分布函数

更多资源请扫二维码：

23.1　概念、结论

1．概念

定义 23.1.1　二维随机变量　设 E 是一个随机试验，其样本空间为 $\Omega=\{e\}$，设 X=X（e）和 Y=Y（e）是定义在该样本空间上的随机变量，则由它们构成的一个向量 (X,Y) 叫做二维随机向量或二维随机变量。同样可定义 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

定义 23.1.2　联合分布函数　设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x、y，二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\leqslant x)\bigcap(Y\leqslant y)\}\triangleq P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或随机变量 x 和 y 的联合分布函数。

2．结论

结论 23.1.1　二维随机变量的联合分布函数的性质如下：

（1）$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$；

（2）$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；

（3）$F(x,y)$ 关于 x（关于 y）单调不减，即对于任意固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$；

（4）$F(x,y)$ 关于 x、y 右连续，即 $F(x+0,y)=F(x,y)$；

（5）$P\{a<X\leqslant b,c<Y\leqslant d\}=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,b)$。

结论 23.1.2　联合分布函数 $F(x,y)$ 是 (X,Y) 的取值落在区域 $(-\infty,x]\times(-\infty,y]$ 内的概率。

23.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 24，知识点 31，知识点 32

● **主要题型**：（1）利用联合分布函数求事件概率；（2）已知联合分布函数求联合分布律或联合概率密度；（3）已知联合分布律或联合概率密度求联合分布函数。

● **综述**：利用联合分布函数求事件概率的关键是利用结论 23.1.1 中（5）的公式；已知联合分布函数求联合分布律的方法：先确定 (X,Y) 的取值，再求解其取每组值的概率；已知联合分布函数求联合概率密度的方法：求二阶混合偏导数；已知联合分布律或联合概率密度求联合分布函数的方法：根据 (X,Y) 的取值划分出区间，在不同的区间上确定概率之和或通过二重积分计算，注意二重积分化累次积分的定限。

23.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　**例 24.3.5**

例 23.3.1（难度系数 0.4） 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为：

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}),$$

求：（1）常数 A、B、C；（2）$P\{0\leqslant X<2,0<Y<3\}$。

解析：本题考查分布函数的性质及利用分布函数计算事件概率的方法。

解：（1）由分布函数的性质，得

$$F(-\infty,-\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0,\quad F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0,$$

$$F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0,\quad F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1,$$

联立四个方程，解得 $A=\frac{1}{\pi^2}$，$B=\frac{\pi}{2}$，$C=\frac{\pi}{2}$；

（2）由于 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$，所以

$$\begin{aligned}P\{0\leqslant X<2,0<Y<3\}&=F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)+F(0,0)\\&=\frac{1}{\pi^2}[(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})^2-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi^2}{4}]=\frac{1}{16}。\end{aligned}$$

招数 23.3.1 妙招：分布函数中的未定参数常用分布函数的性质建立联立方程组进行求解。

例 23.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 26） 设二维随机向量（X，Y）的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}C-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）常数 C；（2）联合概率密度 $f(x,y)$。

解析：先利用联合分布函数的性质确定常数，再通过求二阶偏导数求联合概率密度，注意联合概率密度函数在不同区间内的表示方式。

解：（1）由性质 $F(+\infty,+\infty)=1$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F\left(x,y\right)=1$，代入得 $C=1$；

（2）由公式 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$，得

当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时，$\dfrac{\partial F}{\partial x}=3^{-x}\ln 3-3^{x-y}\ln 3$，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3^{-x}\ln 3-3^{-x-y}\ln 3)=3^{-x-y}(\ln 3)^2。$$

故联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3^{-x-y}(\ln 3)^2, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

例 23.3.3 （难度系数 0.6，跨知识点 24，29） 一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}-\mathrm{e}^{-0.5y}+\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（1）问 X 和 Y 是否相互独立？（2）求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率。

解析：已知二维随机变量的联合分布函数，则可通过计算两个边缘分布函数来判断随机变量是否独立。

解：（1）二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}$$

二维随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0。\end{cases}$$

因为 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X 和 Y 相互独立。

（2）两个部件的寿命都超过 100 小时的概率为

$$P\left\{X>0.1,Y>0.1\right\}=1-F(+\infty,0.1)-F(0.1,+\infty)+F(0.1,0.1)$$
$$=1-2(1-\mathrm{e}^{-0.05})+(1-\mathrm{e}^{-0.05}-\mathrm{e}^{-0.05}+\mathrm{e}^{-0.1})=\mathrm{e}^{-0.1}$$

例 23.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 24） 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下表所示。

X \ Y	-1	0
1	1/4	1/4
2	1/6	a

求：（1）a 的值；（2）(X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$；

（3）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$。

解析：先根据联合分布律的性质确定常数，然后据联合分布律求联合分布函数，关键注意区间表示形式及在此区间的概率；最后由联合分布函数求边缘分布函数。

解：（1）由归一性 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+a=1$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$。

（2）(X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ 或 } y<-1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant x<2,\ -1\leqslant y<0,\\ \dfrac{5}{12}, & x\geqslant 2,\ -1\leqslant y<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\ y\geqslant 0,\\ 1, & x\geqslant 2,\ y\geqslant 0。\end{cases}$$

（3）(X, Y) 关于 X、Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}\quad F_y(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ \dfrac{5}{12}, & -1\leqslant y<0,\\ 1, & y\geqslant 0。\end{cases}$$

例 23.3.5 （难度系数 0.6，跨知识点 26） 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数。

解析：已知联合概率密度求联合分布函数，在求积分时要注意:（1）划分不同的区间讨论;（2）不同区间需根据概率密度函数的取值确定不同的积分上、下限。

解：设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，则

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ \int_0^x\int_0^y 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \int_0^x\int_0^1 4uy\mathrm{d}u\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>1,\\ \int_0^1\int_0^y 4xv\mathrm{d}x\mathrm{d}v, & x>1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\ y>1。\end{cases}$$

即

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>1,\\ y^2, & x>1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\ y>1。\end{cases}$$

招数 23.3.2　绝招：区域的划分方法：先画出 $f(x,y)\neq 0$ 的区域的图形，再结合图形确定如何分片讨论。

知识点 24　二维随机变量的边缘分布函数

更多资源请扫二维码:

24.1　概念、结论

1. 概念

定义 24.1.1 二维随机变量的边缘分布函数　二维随机变量(X, Y)作为一个整体，具有联合分布函数$F(x,y)$，而X和Y都是随机变量，各自也具有分布函数，分别记为$F_X(x)$、$F_Y(y)$，依次称为二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数。

2. 结论

结论 24.1.1　二维随机变量(X, Y)的边缘分布函数可由联合分布函数$F(x,y)$确定。

二维随机变量(X, Y)关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y);$$

二维随机变量(X, Y)关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\}=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)。$$

结论 24.1.2　已知X和Y的边缘分布函数，一般并不能确定(X, Y)的联合分布函数$F(x,y)$，但若随机变量X和Y相互独立时，则可以确定联合分布函数。

24.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 3
- **最关联知识点：** 知识点 25，知识点 27，知识点 28
- **主要题型：**（1）已知联合分布函数求边缘分布函数；（2）已知联合分布律或联合概率密度求边缘分布函数。
- **综述：** 已知联合分布函数可直接通过结论 24.1.1 中的公式求解边缘分布函数，但若仅已知边缘分布函数并不能确定联合分布函数（特殊情况如随机变量独立除外）；已知联合分布律或联合概率密度求边缘分布函数有两种方法：一，先求联合分布函数，再求边缘分布函数；二，先求边缘分布律或边缘概率密度，再求边缘分布函数。

24.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 23.3.3 例 23.3.4

例 24.3.1（难度系数 0.6，跨知识点 23，26） 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-2(x+y)}, & 0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

求：（1）常数C；（2）联合分布函数$F(x,y)$；（3）边缘分布函数$F_X(x)$、$F_Y(y)$。

解析：已知联合概率密度函数可通过积分求解联合分布函数及边缘分布函数，特别注意随机变量的取值区间。

解：（1）因为$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-2(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\int_0^{\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\infty}e^{-2y}\mathrm{d}y=C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，所以$C$=4。

（2）$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 4e^{-2(u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

$\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}) & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（3）因为$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^x\int_0^{\infty}4e^{-2(u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$所以可得

$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 同理可得 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

招数 24.3.1 妙招：联合分布律或联合概率密度中的未知参数一般通过其性质确定。

例 24.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 25） 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{24}$
2	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

且$P(X=1)=\frac{1}{2}$，求：（1）a、b的值；（2）关于X和关于Y的边缘分布函数。

解析：欲求离散型随机变量的边缘分布函数一般需先求出联合分布律，再求出边缘分布律，最后再求出边缘分布函数。

解：（1）由$P(X=1)=\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$，得$a=\frac{1}{3}$；再由$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1$，

得 $a+b=\dfrac{11}{24}$，最后得 $b=\dfrac{1}{8}$。

（2）因为 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

所以关于 X 和 Y 的边缘分布律为

X	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

故关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ \dfrac{5}{6}, & 2\leqslant y<3,\\ 1, & 3\leqslant y。\end{cases}$$

例 24.3.3（难度系数 1.0，跨知识点 25）　把 4 个球随机地放入 3 个盒子中去，设随机变量 X、Y 分别表示放入第一个、第二个盒子中球的个数，求：（1）二维随机变量（X, Y）的联合概率分布；（2）随机变量（X, Y）的边缘分布函数。

解析：求离散型随机变量的边缘分布函数的步骤：先求出联合分布律，再求出边缘分布律，最后求出边缘分布函数。

解：$\{X=i,Y=j\}$ 表示从 4 个球中选 i 个放入第一个盒子，再从余下的 $4-i$ 个球中选 j 个放入第二个盒子，剩余的 $4-i-j$ 个放入第三个盒子，于是得（X, Y）的联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=C_4^i(\frac{1}{3})^i C_{4-i}^j(\frac{1}{3})^j C_{4-i-j}^{4-i-j}(\frac{1}{3})^{4-i-j}=\frac{4!}{i!\,j!(4-i-j)!}(\frac{1}{3})^4,$$

其中 $i, j=0,1,2,3,4$，且 $0\leqslant i+j\leqslant 4$。

于是得（X, Y）的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$
1	$\frac{4}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{4}{81}$	0
2	$\frac{6}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{6}{81}$	0	0
3	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	0	0	0

4	$\frac{1}{81}$	0	0	0	0

利用 $p_{i\cdot}=\sum_{j=0}^{4}p_{ij}$， $i=0,1,2,3,4$，得 X 的边缘分布律为

X	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

利用 $p_{\cdot j}=\sum_{i=0}^{4}p_{ij}$， $j=0,1,2,3,4$，得 Y 的边缘分布律为

Y	0	1	2	3	4
p_j	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

其边缘分布函数分别为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{16}{81}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{48}{81}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{72}{81}, & 2\leqslant x<3,\\ \frac{80}{81}, & 3\leqslant x<4,\\ 1, & 4\leqslant x,\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{16}{81}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{48}{81}, & 1\leqslant y<2,\\ \frac{72}{81}, & 2\leqslant y<3,\\ \frac{80}{81}, & 3\leqslant y<4,\\ 1, & 4\leqslant y。\end{cases}$

例 24.3.4（难度系数 0.6，跨知识点 23，26） 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0\quad, & \text{其他。}\end{cases}$$

求 X 与 Y 的边缘分布函数。

解析：边缘分布函数的求解步骤为：先求 (X,Y) 联合分布函数，然后再求边缘分布函数。注意对函数分片讨论，不要遗漏。

解：先求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$。

$$F(x,y)=\begin{cases}0\quad, & x\leqslant -1\text{或}y\leqslant -1\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & |x|<1,|y|<1\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{1}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & |x|<1,y>1\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>1,|y|<1\\ 1\quad, & x\geqslant 1,y\geqslant 1\end{cases}$$

$$
=\begin{cases}
0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } y\leqslant -1,\\
\dfrac{1}{4}(x+1)(y+1)+\dfrac{1}{16}(x^2+1)(y^2+1), & |x|<1,|y|<1,\\
\dfrac{1}{2}(x+1), & |x|<1,\ y>1,\\
\dfrac{1}{2}(y+1), & x>1,\ |y|<1,\\
1, & x\geqslant 1,\ y>1。
\end{cases}
$$

所以关于 X 的边缘分布函数为

$$
F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}
0, & x<-1,\\
\dfrac{1}{2}(x+1), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\
1, & x>1。
\end{cases}
$$

关于 Y 的边缘分布函数为

$$
F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}
0, & y<-1,\\
\dfrac{1}{2}(y+1), & -1\leqslant y\leqslant 1,\\
1, & y>1。
\end{cases}
$$

知识点 25　二维离散型随机变量的联合分布、边缘分布和条件分布

更多资源请扫二维码:

25.1　概念、结论

1．概念

定义 25.1.1　二维离散型随机变量　如果二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为有限个有序对或至多可列个有序对 (x,y)，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量。

定义 25.1.2　二维离散型随机变量的联合分布　设二维离散随机变量 (X,Y) 的所有可能值为 (x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，则称 $P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$ 为二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律。

定义 25.1.3　二维离散型随机变量边缘分布

(X,Y)关于X的边缘分布律：$P\left\{X=x_i\right\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}(i=1,2,\cdots)$；

(X,Y)关于Y的边缘分布律：$P\left\{Y=y_j\right\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}(j=1,2,\cdots)$。

定义 25.1.4　二维离散型随机变量条件分布

在$Y=y_j$的条件下随机变量X的条件分布律：$P\left\{X=x_i\middle|Y=y_j\right\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(i=1,2,\cdots)$；

在$X=x_i$的条件下随机变量Y的条件分布律：$P\left\{Y=y_j\middle|X=x_i\right\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(j=1,2,\cdots)$。

2. 结论

结论 25.1.1　边缘分布律可以通过联合分布律分别按行、列求和计算：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$p_{2\cdot}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	1

结论 25.1.2　(X,Y)的联合分布律具有如下性质：$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$。

结论 25.1.3　(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)=P\left\{X\leqslant x,Y\leqslant y\right\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x}\sum\limits_{y_j\leqslant y}p_{ij}$。

结论 25.1.4　(X,Y)的边缘分布函数为

$$F_X(x)=P\left\{X\leqslant x\right\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\left\{X=x_i\right\}=\sum_{x_i\leqslant x}p_{i\cdot},$$

$$F_Y(y)=P\left\{Y\leqslant y\right\}=\sum_{y_j\leqslant y}P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_{y_j\leqslant y}p_{\cdot j}\text{。}$$

25.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- 最关联知识点：知识点 23，知识点 31
- **主要题型**：（1）求二维离散型随机变量的联合分布律；（2）求边缘分布律或条件分布律；（3）二维随机变量所表示的事件概率。
- **综述**：求二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律分两步：首先确定(X,Y)的所有可能取值；其次计算其取每组值的概率。二维离散型随机变量所表示的事件的概率及边缘分布律的计算相对简单，条件分布律的计算公式也简单，但仍需注意条件及过程的书写规范。

25.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 24.3.3，　例 24.3.4，　例 35.3.5

例 25.3.1（难度系数 0.4）　盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到白球的只数。求：（1）(X,Y) 的联合分布律；（2）X 和 Y 的边缘分布律；（3）当 X 取值为 2 时，Y 的条件分布律。

解析：本题考查联合分布律、边缘分布律及条件分布律的计算；求二维随机变量联合分布律的关键在于首先清楚二维随机变量的所有可能取值，其次计算随机变量取每个值的概率。

解： X 的可能值为 0,1,2,3；Y 的可能值为 0,1,2；计算每一对可能值的概率如下：

$P\{X=0,Y=0\}=0$；$P\{X=0,Y=1\}=0$；$P\{X=1,Y=0\}=0$。

$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$；$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{6}{35}$。

$P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{6}{35}$；$P\{X=2,Y=0\}=\dfrac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$。

$P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$；$P\{X=2,Y=2\}=\dfrac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{3}{35}$。

$P\{X=3,Y=0\}=\dfrac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$；$P\{X=3,Y=1\}=\dfrac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$。

$P\{X=3,Y=2\}=0$。

（1）(X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

（2）边缘分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

和

Y	0	1	2
p	$\frac{5}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{10}{35}$

（3）当 X 取值为 2 时，Y 的条件分布律为

$P\{Y=0\,|\,X=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=0\}}{P\{X=2\}}=\dfrac{3}{18}$；$P\{Y=1\,|\,X=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=2\}}=\dfrac{12}{18}$；

$P\{Y=2\,|\,X=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{X=2\}}=\dfrac{3}{18}$。

例 25.3.2（难度系数 0.6） 设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$(i=1,2)$，且满足 $P\left\{X_1X_2=0\right\}=1$，求 (X,Y) 的联合分布律。

解析：已知随机变量的联合分布律，可求其边缘分布律，反之不成立；但在一定条件下可利用边缘分布律求联合分布律。其条件未必是随机变量独立，如此题。

解：由 $P\left\{X_1X_2=0\right\}=1$ 可知 $P\left\{X_1X_2\neq 0\right\}=0$，于是 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X_1=-1,X_2=-1\}=P\{X_1=-1,X_2=1\}=0,$$
$$P\{X_1=1,X_2=-1\}=P\{X_1=1,X_2=-1\}=0。$$

因为 $P\{X_1=-1\}=\dfrac{1}{4}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=-1,X_2=0\}+P\{X_1=-1,X_2=-1\}$，

所以 $P\{X_1=-1,X_2=0\}=\dfrac{1}{4}$；同理可得 $P\{X_1=0,X_2=-1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X_1=1,X_2=0\}=\dfrac{1}{4}$，

$P\{X_1=0,X_2=1\}=\dfrac{1}{4}$，故 (X,Y) 的联合分布律为

X_1 \ X_2	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

例 25.3.3（难度系数 0.6，2001 年考研数学一真题） 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p 且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；（2）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律。

解析：本题主要考查利用条件概率和乘法公式计算二维随机变量对应事件发生的概率。

解：（1）依题可知：$P\left\{Y=m\middle|X=n\right\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$。

（2）因为 X 服从参数为 λ 的泊松分布，所以 $P\left\{X=n\right\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，故二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\left\{X=n,Y=m\right\}=P\left\{X=n\right\}P\left\{Y=m\middle|X=n\right\}$$
$$=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad(n=0,1,2\cdots,m=0,1,\cdots,n)。$$

例 25.3.4（难度系数 0.6，2005 年考研数学一、三真题）　从数 1、2、3、4 中任取一个数，记为 X，再从 1，2，…，X 中任取一个数，记为 Y，求 $P\{Y=2\}$。

解析：本题考查随机变量中有关概率的计算问题，注意两个随机变量之间的联系。

解：由题知 X 为等概率分布，因此随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

在确定 X 的条件下，Y 为等概率分布，由此可求 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

因此 $P\{Y=2\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{48}$。

例 25.3.5（难度系数 0.8，跨知识点 8，17）　若 ξ_1 与 ξ_2 是相互独立的随机变量，且均服从泊松分布，参数分别为 λ_1、λ_2，试证明 $\xi_1+\xi_2$ 服从泊松分布，其参数为 $\lambda_1+\lambda_2$。

解析：本题考查相互独立的二维随机变量概率的计算、全概率公式及泊松分布的概念及计算。

证明：根据已知可得 ξ_1 与 ξ_2 的分布律为

$$P\{\xi_i=k\}=\frac{\lambda_i^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-\lambda_i}\text{，}\quad k=0,1,2,\cdots\text{（}i=1,2\text{）。}$$

又由于 ξ_1 与 ξ_2 是相互独立的随机变量，故

$$\begin{aligned}P\{\xi_1+\xi_2=k\}&=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i,\xi_2=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{\xi_1=i\}P\{\xi_2=k-i\}\\&=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i\,!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}=\frac{1}{k\,!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k\,!}{i\,!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\&=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k\,!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad\text{（}k=0,1,2,\cdots\text{）}\end{aligned}$$

即证明了 $\xi_1+\xi_2$ 服从泊松分布，且参数为 $\lambda_1+\lambda_2$。

例 25.3.6（难度系数 0.8，2009 年考研数学一、三真题）　设袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以 X、Y、Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数。求：（1）$P\{X=1|Z=0\}$；（2）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律。

解析：主要考查二维随机变量的联合分布律以及条件概率计算方法，最终归于古典概型的计算。注意随机变量之间的联系及其所表示事件的意义。

解：（1）$P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{C_2^1\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{9}$。

（2）由题意可知 X 所有可能取值为 0、1、2；Y 的所有可能取值为 0、1、2。

$P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=0,Y=1\}=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，

$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，$P\{X=1,Y=0\}=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，

$P\{X=1,Y=1\}=C_2^1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，$P\{X=1,Y=2\}=0$。

$P\{X=2,Y=0\}=\dfrac{1}{36}$，$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2,Y=2\}=0$。

综上，(X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

知识点 26　二维连续型随机变量的联合概率密度

更多资源请扫二维码:

26.1　概念、结论

1. 概念

定义 26.1.1 二维连续型随机变量　对二维随机变量 (X,Y) 及其分布函数 $F(x,y)$，若存在非负函数 $f(x,y)$，使得 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，并称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度。

2. 结论

结论 26.1.1　二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度的性质如下。

（1）非负性：$f(x,y)\geqslant 0$。

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty)=1$。

（3）连续性：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 连续。

（4）若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y)$。

（5）设 G 是平面上某个区域，则 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

（6）若 $F(x,y)$ 连续，可导，则 (X,Y) 是连续型的，且 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$ 是它的概率密度函数。

26.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 4
- **最关联知识点**：知识点 23，知识点 27
- **主要题型**：（1）联合概率密度函数的判定及参数的确定；（2）已知联合概率密度求事件的概率；（3）在特定条件下求联合概率密度。
- **综述**：通过概率密度函数的性质即可判定一个函数是否可以作为联合概率密度函数以及确定其参数；已知联合概率密度，则二维随机变量所表示事件的概率可通过联合概率密度的二重积分来计算，具体可借助区域的图形来确定其上下限；已知联合概率密度可求边缘概率密度，但反之不行，但在两个随机变量独立时可通过边缘概率密度求联合概率密度。

26.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 23.3.5，　例 24.3.2，　例 29.3.2

例 26.3.1　（难度系数 0.4）　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} C\mathrm{e}^{-2(x+y)}, & 0<x<+\infty,\quad 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）常数 C；（2）(X,Y) 落在区域 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1\}$ 内的概率。

解析：（1）利用二维随机变量概率密度的性质确定常数；（2）对概率密度求二重积分计算事件的概率，积分的区域的选择请看下面招数 26.3.1 中的“绝招”。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}C\mathrm{e}^{-2(x+y)}\mathrm{d}y=\dfrac{C}{4}=1$，解得 $C=4$。

（2）利用二重积分计算概率：

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}4\,\mathrm{e}^{-2(x+y)}\,\mathrm{d}y=1-3\mathrm{e}^{-2}\ 。$$

招数 26.3.1 绝招：二维随机变量利用二重积分计算概率的方法：在平面上画出 $f(x,y)\neq 0$ 的区域，再画出所求概率的事件区域，根据此两个区域的重叠部分确定二重积分的上下限，计算得概率。

例 26.3.2 （难度系数 0.6） 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0，y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

求：（1）常数 A；（2）随机变量 (X,Y) 的分布函数；（3） $P\{0\leqslant X\leqslant 2，0\leqslant Y\leqslant 2\}$。

解析：（1）利用二维随机变量概率密度性质确定常数；（2）利用概率密度作二重积分计算二维随机变量的分布函数，特别注意 (X,Y) 的积分区间；（3）利用分布函数或概率密度均可计算事件概率，利用概率密度时需要作二重积分。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}A\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{A}{12}=1$，得 $A=12$。

（2）按定义，有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^y 12\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & y>0,x>0,\\ 0, & \end{cases}=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & y>0，x>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（3） $P\{0\leqslant X<2，0\leqslant Y<2\}=\int_0^2\int_0^2 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-6})(1-\mathrm{e}^{-8})$。

例 26.3.3（难度系数 0.6，2007 年考研数学一真题） 在区间（0，1）中随机地取两个数，求这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率。

解析：此题既可从几何概型着手处理，也可利用二维均匀分布给出联合概率密度，再计算事件的概率。

解：设随机取到的两个数为 X 与 Y，则 (X,Y) 服从正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的均匀分布。

利用二重积分计算

$$P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y，其中 D=\{(x,y)\,|\,|x-y|<\frac{1}{2}\}。$$

由区域 $\begin{cases}0<x<1，0<y<1\\ |x-y|<\dfrac{1}{2}\end{cases}$，得 $\begin{cases}0<x<\dfrac{1}{2}\\ 0<y<x+\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 及 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<1\\ x-\dfrac{1}{2}<y<1\end{cases}$，故

$$P(A)=P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x+\frac{1}{2}}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{x-\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\ 。$$

例 26.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 20）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 的指数分布。（1）求 (X,Y) 的联合概率密度；（2）求 $P\{X\leqslant Y\}$。

解析：在随机变量相互独立的情况下，可由边缘概率密度用乘法求联合概率密度。

解：（1）由题意可知，$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他；\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & 其他；\end{cases}$ 且 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，故

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1，y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（2）通过二重积分计算概率

$$P\{X\leqslant Y\}=\int_0^1\left[\int_x^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_x^{\infty}(-2)\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}d\left(-\frac{y}{2}\right)\right]dx=2-2e^{-\frac{1}{2}}。$$

例 26.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 29，30）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1，y^2\leqslant x$ 内服从均匀分布。求：（1）(X, Y)的联合概率密度；（2）X 与 Y 的边缘概率密度，并问它们是否相互独立？

解析：本题考查：（1）二维均匀分布的概念；（2）利用联合概率密度求边缘概率密度；（3）判断随机变量的独立性。已知联合概率密度可求边缘概率密度，反之不行。

解：（1）设区域 $0\leqslant x\leqslant 1，y^2\leqslant x$ 的面积为 A，则 $A=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\dfrac{4}{3}$。

依题意得

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y^2\leqslant x\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y^2\leqslant x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（2）计算得 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\dfrac{3}{4}dy=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{y^2}^{1}\dfrac{3}{4}dx=\dfrac{3}{4}(1-y^2), & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

即 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-y^2), & -1\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$。由此可知 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，故随机变量 X 与 Y 不相互独立。

知识点 27　二维连续型随机变量的边缘概率密度

更多资源请扫二维码:

27.1　概念、结论

1．概念

定义 27.1.1 二维连续型随机变量的边缘概率密度　设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，由于$F_X(x)=F\left(x,+\infty\right)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$，则$X$也是一个连续型随机变量，其概率密度为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$；同样$Y$也为连续型随机变量，其概率密度为$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$。分别称$f_X\left(x\right)$和$f_Y(y)$为$(X,Y)$关于$X$和关于$Y$的边缘概率密度。

2．结论

结论 27.1.1　由(X,Y)的联合概率密度可求X的边缘概率密度$f_X(x)$，也可求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$，即由联合概率密度可确定边缘概率密度；但反之不行，即已知X和Y的边缘概率密度，不能确定关于(X,Y)的联合概率密度。

结论 27.1.2　求边缘概率密度时，关键是求出随机变量X和Y可能值范围内的边缘概率密度表达式，因此首先要确定X和Y的取值范围，然后在此范围中通过积分求概率密度函数，其他范围内概率密度函数为零。

结论 27.1.3　边缘概率密度函数同样满足概率密度函数的性质，如：

（1）$f_X(x)\geqslant 0$；（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=1$。

结论 27.1.4　对多维随机变量而言，要求某随机变量所表示的事件的概率，一般先求边缘概率密度，再利用边缘概率密度进行计算概率。

27.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 24，知识点 26，知识点 28

● **主要题型**：已知联合概率密度求边缘概率密度。

● **综述**：由于联合分布函数往往是分片函数，或者仅在某个部分区域取非零值，因此已知联合概率密度求边缘概率密度的关键是先根据 $f(x,y)\neq 0$ 的区域确定 X 和 Y 的取值范围（其他范围内概率密度函数为零），再根据 $f(x,y)\neq 0$ 的区域特点确立定义 27.1.1 中积分式的上、下限。

27.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 28.3.1，　例 28.3.7，　例 30.3.3

例 27.3.1（难度系数 0.4）　设二维随机变量 (X,Y) 具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-2(x+y)}, & 0<x<+\infty，0<y<+\infty，\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

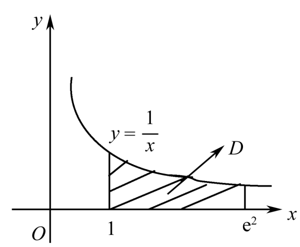
求：（1）常数 C；（2）X 与 Y 边缘概率密度。

解析：首先利用联合概率密度函数的性质求参数，其次利用公式计算边缘概率密度，注意先分段，然后对每一段积分，积分中定限是关键。

解：（1）由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-2(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\int_0^{\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\infty}e^{-2y}\mathrm{d}y=C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，得 C=4。

（2）关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4e^{-2x-2y}\mathrm{d}y=2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$ 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4e^{-2x-2y}\mathrm{d}x=2e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

例 27.3.2（难度系数 0.6）　设二维随机变量 (X,Y) 在由 $y=\frac{1}{x}$，$y=0$，$x=1$ 和 $x=e^2$ 所围成的区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=3$ 点的值为______。



解析：首先写出二维均匀分布的联合概率密度函数，其次用公式求出边缘概率密度，最后求出 $x=3$ 点的值。

解：如右图所示，阴影部分的面积为

$S_{阴}=\int_1^{e^2}(\frac{1}{x}-0)\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{e^2}=2$，所以

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

代入计算得 $f_X(3)=\dfrac{1}{6}$ （注：或直接利用公式计算得 $f_x(3)=\int_0^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}$）。

例 27.3.3（难度系数 0.8） 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1$，$|y|<x$ 内服从均匀分布，求边缘概率密度。

解析：先确定 X 和 Y 的取值范围，在此范围中通过定积分求概率密度函数，其他范围内概率密度函数则为零。

解：易见区域 D：$0<x<1$，$|y|<x$ 的面积为 1，则依题知 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

关于 X 和 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1\\ \int_{-x}^{x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他；\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & y\leqslant -1\\ \int_{-y}^{1}\mathrm{d}x, & -1<y\leqslant 0\\ \int_{y}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1+y, & -1<y\leqslant 0\\ 1-y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

招数 27.3.1 绝招：已知联合概率密度求边缘概率密度时，在平面上划出 $f(x,y)\neq 0$ 的区域，首先根据此区域的特点，确定 X 或 Y 的取值范围，确立分段函数的框架，再通过画平行坐标轴的直线确定积分上下限。

例 27.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 20，29） 设于 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$（1）求 X 与 Y 的联合概率密度；（2）设关于 t 的二次方程为 $t^2+2tX+Y=0$，试求 t 有实根的概率。

解析：首先根据随机变量的独立性求二维随机变量的联合概率密度，其次根据题目条件求事件发生的概率。

解：（1）依题可知，$f_X(x)==\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他；\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$ 因 X 与 Y 相互

独立，故 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2）方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的充分必要条件是 $\Delta=(2X)^2-4Y\geqslant 0$，即 $X^2\geqslant Y$；从而方程有实根的概率为

$$P\{X^2\geqslant Y\}=\iint\limits_{x^2\geqslant y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}\mathrm{d}y=1-\sqrt{2\pi}[\varPhi(1)-\varPhi(0)]=0.1445。$$

例 27.3.5（难度系数 0.6）　设二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{2}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（1）求常数 k；（2）求 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度；（3）判断随机变量 X 和 Y 是否相互独立。

解析：（1）利用联合概率密度的性质求常数；（2）利用公式计算边缘概率密度，注意取值区间；（3）通过边缘概率密度和联合概率密度判断随机变量的独立性。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，代入概率密度的表达式得 $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\dfrac{k}{2}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=1$，经过计算得 $k=2$。

（2）X 的取值范围为 $(0,+\infty)$，因此 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，故

$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，同理可得 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

（3）因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不相互独立。

例 27.3.6（难度系数 0.6，跨知识点 32，2005 年考研数学一、三真题）　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

求：（1）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

解析：本题考查:（1）二维随机变量的边缘概率密度；（2）二维随机变量函数的分布。

解：（1）当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x$。

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$。综上得 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\frac{y}{2}}^1\mathrm{d}x=1-\dfrac{y}{2}$。

当 $y \leqslant 0$ 或 $y \geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$。综上得 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

（2）当 $z \leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$。

当$0<z<2$时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_0^{2x}dy+\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_{2x-z}^{2x}dy=z-\dfrac{z^2}{4}$。

当 $z \geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$。综上得 $F_Z(z)=\begin{cases}0, z\leqslant 0,\\ z-\dfrac{z^2}{4}, & 0<z<2,\\ 1, z\geqslant 1。\end{cases}$

因此 $Z=2X-Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

知识点 28　二维连续型随机变量的条件概率密度

更多资源请扫二维码:

28.1　概念、结论

1．概念

定义 28.1.1　二维连续随机变量的条件概率密度　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$，若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$ 的条件下关于 X 的条件概率密度，记为 $f_{X|Y}(x|y)\triangleq\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。同样可定义在 $X=x$ 条件下关于 Y 的条件概率密度。

定义 28.1.2　二维连续随机变量的条件分布函数

$F_{X|Y}(x\,|\,y)=P\left\{X\leqslant x\,|\,Y=y\right\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$ 称为 $Y=y$ 的条件下关于 X 的条件分布函数。同样可定义在 $X=x$ 条件下关于 Y 的条件分布函数。

2．结论

结论 28.1.1　求条件概率密度时，关键是求出在保证 $f_Y(y)>0$ 的可能值范围内的条

件概率密度表达式。

结论 28.1.2　条件概率密度的性质如下：

（1）$f_{X|Y}(x|y)\geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=1$；

（3）$f\left(x,y\right)=f_Y\left(y\right)f_{X|Y}(x|y)\geqslant 0\quad\left(f_Y\left(y\right)>0\right)$。

28.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 26，知识点 27
- **主要题型**：（1）已知联合概率密度求条件概率密度；（2）已知条件概率密度，在一定条件下求联合概率密度或事件的概率。
- **综述**：已知联合概率密度求条件概率密度分两步：先求边缘概率密度，再利用定义 28.1.2 中的公式求条件概率密度，特别注意条件概率密度的表示形式；若已知条件概率密度，则可通过公式 $f\left(x,y\right)=f_Y\left(y\right)f_{X|Y}(x|y)\geqslant 0\quad\left(f_Y\left(y\right)>0\right)$ 求联合概率密度。

28.3　经典例题精解巧析

例 28.3.1（难度系数 0.4）　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6,\ x^2\leqslant y\leqslant x,\\ 0,\quad 其他。\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$。

解析：按定义 28.1.1 中的公式，先求边缘概率密度，再求条件概率密度。其中的关键在于求出可能值范围内的条件密度表达式。特别要注意的是针对分段函数，如何确定条件概率密度的分段形式，这是大家容易糊涂的地方。

解：根据 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6,\ x^2\leqslant y\leqslant x\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，经计算得关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ \quad 0,\qquad 其他\end{cases}$，关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \quad 0,\qquad 其他,\end{cases}$

由 $x^2\leqslant y\leqslant x$，得 $y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$，在 $Y=y\,(0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}-y},\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{y},\\ \quad 0,\qquad 其他。\end{cases}$$

在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-x^2}, & x^2\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

例 28.3.2（难度系数 0.4，2007 年考研数学一、三真题） 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 分别表示 X 与 Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为（　　）。

（A）$f_X(x)$　　（B）$f_Y(y)$　　（C）$f_X(x)f_Y(y)$　　（D）$\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

解析：本题主要考查两个随机变量相互独立的条件下概率密度函数之间的关系。

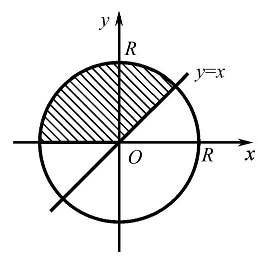
在随机变量（X, Y）服从二维正态分布的条件下，因 X 与 Y 不相关等价于它们相互独立，故其联合分布密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，由条件分布密度的定义可得 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$，故选择（A）。

解：（A）。

注意：二维正态分布中，X 与 Y 不相关和 X 与 Y 独立是相互等价的概念。

例 28.3.3（难度系数 0.8） 某雷达的圆形屏幕半径为 R，设目标总是出现在屏幕上，出现屏幕上的点的坐标 (X,Y) 服从均匀分布。（1）求 $P\{Y>0\mid Y>X\}$；（2）设 $M=\max\{X,Y\}$，求 $P\{M>0\}$。

解析：此题第一步应根据题意画图，确定联合密度函数的定义区域。然后按照以下思路计算:（1）按条件概率公式可计算所求概率;（2）可利用联合概率密度求事件 $P\{M>0\}$ 的概率。



解：圆形屏幕如右图所示。

根据已知可得 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

（1）$$P\{Y>0\mid Y>X\}=\frac{P\{Y>0,Y>X\}}{P\{Y>X\}}=\frac{\displaystyle\iint\limits_{\substack{y>0\\y>x}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\iint\limits_{y>x}f(x,y)\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{\pi R^2}r\mathrm{d}r}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4};$$

（2）$$P\{M>0\}=P\{\max(X,Y)>0\}=1-P\{\max(X,Y)\leqslant 0\}$$
$$=1-P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}=1-\iint\limits_{\substack{x\leqslant 0\\y\leqslant 0}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}。$$

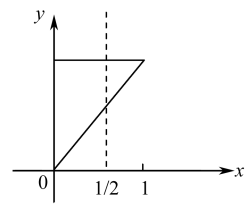
例 28.3.4（难度系数 0.6） 设 X 关于 Y 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

而 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，求 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$。

解析：已知条件概率密度与边缘概率密度可求联合概率密度，再利用联合概率密度求事件发生的概率。

解：(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_{X|Y}(x\mid y)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0\ , & 其他。\end{cases}$$



根据右图，联立 $\begin{cases}0<x<y<1\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<1\\ x<y<1\end{cases}$。所以

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x}^{1}15x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}15x^2\cdot\frac{1-x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{47}{64}。$$

例 28.3.5（难度系数 0.8，2004 年考研数学四真题）　设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求：（1）随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；（2）Y 的概率密度；（3）概率 $P\{X+Y>1\}$。

解析：同例 28.3.4。

解：因为 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，所以其概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他；\end{cases}$ 因为在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，所以其条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（1）X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\quad 0<y<x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（2）Y 的取值范围是 $(0,1)$，Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$。

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y$，当 $y\geqslant 1$ 或 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$，故 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（3）$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}y=1-\ln 2$。

招数 28.3.1 绝招：欲求二维随机变量 (X,Y) 满足条件 $(X,Y)\in D$ 的概率，应该马上联想到二重积分的计算，其积分区域是由联合概率密度 $f(x,y)\neq 0$ 的平面区域及满足 $(X,Y)\in D$ 的区域的公共部分。

例 28.3.6（难度系数 0.8，跨知识点 32，2008 年考研数学一、三、四真题）　设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}$，　$(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, 0\leqslant y<1\\0, \text{其他}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$。求：（1）$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$；（2）$Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

解析：本题考查（1）条件概率的计算；（2）两个相互独立的随机变量和的分布。

解：（1）$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=\dfrac{P\left\{X=0, Z\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\left\{X=0, Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\{X=0\}}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$。

（2）$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant Z\}$

$$
\begin{aligned}
&=P\{X+Y\leqslant z,X=-1\}+P\{X+Y\leqslant z,X=0\}+P\{X+Y\leqslant z,X=1\}\\
&=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}\\
&=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}\\
&=\frac{1}{3}\left[P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y<z-1\}\right]\\
&=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right],
\end{aligned}
$$

$$
f_Z(z)=F'_Z(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}
$$

例 28.3.7（难度系数 0.8，跨知识点 27、30，2011 年考研数学一真题）　设 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，G 由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成，求：（1）边缘概率密度 $f_X(x)$；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$。

解析：利用二维均匀分布的定义，先求联合概率密度，再通过联合概率密度求边缘概率密度和条件概率密度。

解：区域 G 的面积为 $A=\int_0^1(2-y-y)\mathrm{d}y=1$，则由二维均匀分布知

$$
f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}，\text{即}\ f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}。
$$

（1）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 1\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \int_0^{2-x}1\mathrm{d}y, & 1<x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

（2）Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}1\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时，根据区域 G 的图形可知 $y<x<2-y$，因此在 $Y=y\ (0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

知识点 29　随机变量的独立性

更多资源请扫二维码:

29.1　概念、结论

1．概念

定义 29.1.1 二维随机变量的独立性　设 $F(x,y)$ 和 $F_X(x)$、$F_Y(y)$ 分别为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数和边缘分布函数，若对所有的 $x,y\in R$，都有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的随机变量。

定义 29.1.2 多维随机变量的独立性　设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$F_{X_i}(x)$ 为随机变量 X_i 的边缘分布函数，若对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。

2．结论

结论 29.1.1　判断随机变量独立性的方法

（1）用分布函数判别：随机变量 X 与 Y 相互独立当且仅当 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$；

（2）针对离散型随机变量，用分布律判别：离散型随机变量 X 与 Y 相互独立当且仅当对于任意 i,j，$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$。

（3）针对连续型随机变量，用概率密度函数判别：连续型随机变量 X 与 Y 相互独立当且仅当 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

结论 29.1.2 相互独立的随机变量的函数所构成的随机变量也相互独立，即：若随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $h(x)$、$g(y)$ 均为连续函数或分段连续函数，则随机变量 $h(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立。

结论 29.1.3 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个随机变量也相互独立。

结论 29.1.4 对二维随机变量 (X,Y)，若 X 和 Y 相互独立，则条件分布等于其边缘分布。

29.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 23，知识点 28
- **主要题型**：（1）判断随机变量的独立性；（2）随机变量独立时参数的确定；（3）针对相互独立的二维随机变量，计算事件发生的概率。
- **综述**：随机变量的独立性可根据题目条件来选择从分布函数、概率密度或分布律进行判断；随机变量独立时其参数的确定主要依据概率密度（或分布律）的性质及两个随机变量相互独立的条件，构造关于参数的方程组来求解；当二维随机变量相互独立时，由联合概率密度等于边缘概率密度的乘积，可先得到联合概率密度再计算事件发生的概率。

29.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 6.3.5， 例 23.3.3， 例 26.3.1

例 29.3.1（难度系数 0.2） 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2
1	α	0.2
2	β	0.3

则 α 与 β 应满足的条件是__________，当 X、Y 相互独立时，$\alpha=$________。

解析：先利用联合分布律的性质，得 α 与 β 应满足的条件，再利用离散型随机变量独立的条件得相应的关于参数的方程组，求解确定联合分布律中的未定常数。

解：根据 $\sum\limits_i\sum\limits_j P_{ij}=1$，得 $\alpha+\beta+0.2+0.3=1$，故 α 与 β 应满足的条件是 $\alpha+\beta=0.5$。

当 X、Y 相互独立时，有 $P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}$，可得 $\alpha=(\alpha+0.2)(\alpha+\beta)$，解得 $\alpha=0.2$。

例 29.3.2（难度系数 0.4）　一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}-\mathrm{e}^{-0.5y}+\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

问随机变量 X 和 Y 是否相互独立？

解析：本题考查联合分布函数和边缘分布函数之间的关系，以及随机变量独立性的判定。

解：二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$；关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$；因为 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X 和 Y 相互独立。

例 29.3.3（难度系数 0.6）　设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)$，证明 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $f(x,y)$ 可分离变量，即 $f(x,y)=g(x)h(y)$。

解析：必要性可通过随机变量独立性的定义证明，充分性的证明则须通过构造概率密度函数进行证明。

证明：必要性。若 X 与 Y 相互独立，记它们的概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，由独立性可知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，则取 $g(x)=f_X(x)$，$h(y)=f_Y(y)$ 即可。

充分性。若 $f(x,y)$ 可分离变量，即 $f(x,y)=g(x)h(y)$。由于 $f(x,y)\geqslant 0$，可知 $g(x)$ 与 $h(y)$ 同号，不妨假设它们恒为正。

记 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=a>0$，由联合分布密度性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 得 $\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{a}$，

令 $f_1(x)=\dfrac{g(x)}{a}$，$f_2(y)=ah(y)$，则 $f_1(x)\geqslant 0$，$f_2(y)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)\mathrm{d}y=1$。所以 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 分别为 X、Y 的边缘概率密度，且 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$。因此，X 与 Y 相互独立。

例 29.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 23，24，32）　设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,\ |Y|<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

试证明 X 与 Y 不独立，但 X^2 与 Y^2 是相互独立的。

解析：由于题目牵涉随机变量函数所构成的随机变量，所以求解时考虑采用分步函数的方法进行判定。本题考查边缘分布函数的求解及利用边缘分布函数判别随机变量的独立性；同时考查随机变量函数分布的求解。

证明：先求 X、Y 的联合分布函数 $F(x,y)$。

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } y\leqslant -1\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & |x|<1,\ |y|<1\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{1}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & |x|<1,\ y>1\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>1,\ |y|<1\\ 1, & x\geqslant 1,\ y\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } y\leqslant -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)(y+1)+\frac{1}{16}(x^2+1)(y^2+1), & |x|<1,|y|<1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & |x|<1,\ y>1,\\ \frac{1}{2}(y+1), & x>1,\ |y|<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\ y>1。\end{cases}$$

关于 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1。\end{cases}$

关于 Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1,\\ \frac{1}{2}(y+1), & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & y>1。\end{cases}$

因为 $F(X,Y)\neq F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X、Y 不独立。

再证 X^2 与 Y^2 独立：设 (X^2,Y^2) 的联合分布函数为 $F_1(z,t)$，则

$$F_1(z,t)=P(X^2\leqslant z,\ Y^2\leqslant t)\xlongequal{z>0,\,t>0}P\{-\sqrt{z}<X\leqslant\sqrt{z},\ -\sqrt{t}<Y\leqslant\sqrt{t}\}$$

$$=F(\sqrt{z},\sqrt{t})-F(\sqrt{z},-\sqrt{t})-F(-\sqrt{z},\sqrt{t})+F(-\sqrt{z},-\sqrt{t})$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant 0 \text{ 或 } t\leqslant 0,\\ \sqrt{tz}, & 0<z<1,\ 0<t<1,\\ \sqrt{t}, & z\geqslant 1,\ 0<t<1,\\ \sqrt{z}, & 0<z<1,\ t\geqslant 1,\\ 1, & z\geqslant 1,\ t\geqslant 1。\end{cases}$$

关于 X^2、Y^2 的边缘分布函数分别为

$$F_{X^2}(z)=\lim_{t\to+\infty}F_1\ (z,t)=\begin{cases}0\ , & z\leqslant 0\\ \sqrt{z}, & 0<z<1\ ,\\ 1\ , & z\geqslant 1\end{cases}\quad F_{Y^2}(t)=\lim_{z\to+\infty}F_1\ (z,t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \sqrt{t}, & 0<t<1\ ;\\ 1\ , & t\geqslant 1\end{cases}$$

因为 $F_1\ (z,t)=F_{X^2}(z)\cdot F_{Y^2}(t)$，所以 X^2 与 Y^2 独立。

例 29.3.5（难度系数 0.6，2005 年考研数学一、三、四真题） 设二维随机变量（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则有______。

（A） $a=0.2$，$b=0.3$　　（B） $a=0.4$，$b=0.1$

（C） $a=0.3$，$b=0.2$　　（D） $a=0.1$，$b=0.4$

解析：本题考查（1）二维随机变量的联合分布律;（2）离散型随机变量的独立性。

解：根据联合分布律性质可知 $a+0.4+b+0.1=1$，即 $a+b=0.5$，且事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$。即 $(0.4+a)(a+b)=a$，由 $\begin{cases}(0.4+a)(a+b)=a\\ a+b=0.5\end{cases}$，解得 $a=0.4$，$b=0.1$。故选择（B）。

例 29.3.6（难度系数 0.6，2012 年考研数学三真题）　设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 和参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$（　　）。

（A） $\dfrac{1}{5}$　　（B） $\dfrac{1}{3}$　　（C） $\dfrac{2}{5}$　　（D） $\dfrac{4}{5}$

解析：先利用指数分布的特点求出 X 与 Y 的概率密度，再根据随机变量的独立性求联合概率密度，最后利用联合概率密度求事件发生的概率。

解：由题意得 X 与 Y 的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ 和 $f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$，

由 X 与 Y 相互独立，可得 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}\ , & x>0，y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，由区域 $\begin{cases}x>0，y>0\\ x>y\end{cases}$，可得 $\begin{cases}0<y<+\infty\\ 0<x<y\end{cases}$。因此

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}4e^{-4y}\mathrm{d}y\int_0^{y}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}4e^{-4y}(1-e^{-y})\mathrm{d}y=[-e^{-4y}]_0^{+\infty}+\frac{4}{5}[e^{-5y}]_0^{+\infty}=\frac{1}{5}。$$

故选择（A）。

知识点 30　二维均匀分布和二维正态分布

更多资源请扫二维码:

30.1　概念、结论

1．概念

定义 30.1.1　二维均匀分布　设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A；若二维随机变量 (X,Y) 具有联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$，则称 (X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布。

定义 30.1.2　二维正态分布　若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中，μ_1、μ_2、σ_1、σ_2、ρ 均为常数，而且 $\sigma_1>0, \sigma_2>0$，$-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 μ_1、μ_2、σ_1^2、σ_2^2、ρ 的二维正态分布。

2．结论

结论 30.1.1　若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则：

（1）关于 X 和 Y 的边缘分布分别为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

（2）其条件分布均为正态分布；

（3）X 和 Y 的非零线性组合 $aX+bY$ 服从正态分布；

（4）X 和 Y 相互独立的充要条件是相关系数 $\rho=0$。

结论 30.1.2　设 D 是平面上的有界区域 G 的子区域，(X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{D\text{的面积}}{G\text{的面积}}$。

结论 30.1.3 设 (X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布，但其边缘分布、条件分布却并不一定为均匀分布，是否均匀分布取决于区域的形状。

30.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 26，知识点 27，知识点 28
- **主要题型**：（1）求二维正态分布所表示事件的概率；（2）求二维正态分布的随机变量线性组合的分布；（3）求二维均匀分布所表示事件的概率及随机变量函数的分布。
- **综述**：二维正态分布中，首先要清楚两个随机变量之间的关系。若两者独立或不相关，则由它们构成的随机变量的线性组合均服从正态分布，此时只需确定参数就可以确定其分布；若两者相关，则需通过二维正态分布的联合概率密度讨论问题。对二维均匀分布，首先通过计算区域面积写出其联合概率密度，再利用该联合概率密度讨论相关问题。

30.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 26.3.1，　例 27.3.2，　例 28.3.7

例 30.3.1（难度系数 0.2）　设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（　）。

（A）$P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$

（C）$P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$　　（D）$P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$

解析：本题考查二维正态分布的概念及性质，注意两个相互独立的正态分布的和或差仍为确定的正态分布。

由于 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，且 X、Y 相互独立，故 $X+Y\sim N(1,2)$，$X-Y\sim N(-1,2)$；若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则必有 $P\{Z\leqslant\mu\}=\dfrac{1}{2}$，故选择（B）。

解：（B）。

例 30.3.2（难度系数 0.4，2003 年考研数学四真题）　设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则（　）。

（A）X 和 Y 一定独立　　（B）(X,Y) 服从二维正态分布

（C）X 和 Y 未必独立　　（D）$X+Y$ 服从一维正态分布

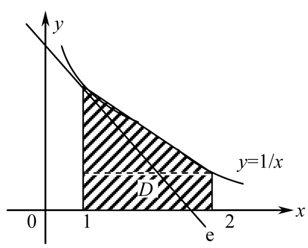
解析：由于当 (X,Y) 服从二维正态分布时，X 和 Y 不相关的充要条件是 X 和 Y 相互独立，所以本题乍看之下易选（A），但是本题仅仅已知 X 和 Y 服从正态分布，并且它们不相关（注意不是相互独立），由此不能导出它们的联合分布 (X,Y) 一定是二维正态分布。由于 (X,Y) 不一定服从二维正态分布，故由它们不相关，不能断言 X 和 Y 一定独立，故排除（A）与（B）。当 X 和 Y 都服从正态分布且相互独立时，才能推出 $X+Y$ 服从一维正态分布，排除（D）。综上可知，（C）的结论成立，故选择（C）。

解：（C）。

例 30.3.3（难度系数 0.6，跨知识点 27，29）　设 (X,Y) 在由直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}^2$，$y=0$ 及曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 所围成的区域上服从均匀分布。（1）求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并说明 X 与 Y 是否独立；（2）求 $P\{X+Y\geqslant 2\}$。

解析：本题考查二维均匀分布的概念及相关问题的计算。二维均匀分布的边缘分布未必是均匀分布，这是因为二维均匀分布概率密度取非零值的区域未必是矩形。注意分段与积分定限。

解：如下图所示。



区域 D 由 $x=1$，$x=\mathrm{e}^2$，$y=0$ 围成，区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}=2$，$(X,Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

（1）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_1^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x, & 1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^{-2}\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x, & \mathrm{e}^{-2}\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1), & 1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^{-2},\\ \dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{2}, & \mathrm{e}^{-2}<y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（2）因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X、Y 不相互独立。

（3）$P\{X+Y\geqslant 2\}=1-P\{X+Y<2\}=1-\iint\limits_{x+y<2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_1^2\left(\int_1^{2-x}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$。

例 30.3.4（难度系数 0.8，2015 年考研数学三真题）　设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，求 $P\{XY-Y<0\}$。

解析：本题考查二维正态分布概念及相关概率计算，注意到二维随机向量 (X,Y) 分布的最后一个参数即 X、Y 的相关系数为零，故随机变量 X、Y 相互独立。

解：由题设知二维正态分布的各个参数为 $\mu_1=1$，$\mu_2=0$，$\sigma_1^2=1$，$\sigma_2^2=1$，$\rho=0$，因此 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，故

$$P\{X>1\}=P\{X<1\}=P\{Y<0\}=P\{Y>0\}=\frac{1}{2}。$$

因为 $\rho=0$，所以 X、Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$
$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

例 30.3.5（难度系数 0.8，跨知识点 39，2000 年考研数学四真题）　设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$，其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零，方差都是 1。

（1）求随机变量 X 和 Y 的概率密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$，以及随机变量 X 和 Y 的相关系数 ρ（可以直接利用二维正态密度的性质）；

（2）随机变量 X 和 Y 是否独立？为什么？

解析：本题较难。（1）首先必须清楚二维正态分布的两个边缘分布都是正态分布，再利用 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的边缘概率密度计算 X 与 Y 的边缘概率密度；由于随机变量 X 和 Y 的数学期望都是零，方差都是 1，则相关系数 $\rho=E(XY)$。

（2）根据公式即可验证独立性。

解：（1）由于二维正态分布的两个边缘分布都是正态分布，所以 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的两个边缘分布均为正态分布，又因为 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的边缘概率密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零，方差都是 1，所以两个边缘分布为标准正态分布。故

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

同样计算得 $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$，即 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$。可见 $E(X)=E(Y)=0$，$D(X)=D(Y)=1$，随机变量 X 和 Y 的相关系数

$$\rho=E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=0。$$

（2）由题设知 $\varphi_1(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}$ 及 $\varphi_2(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}$，因此

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}+\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}\right],$$

$$f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{(x^2+y^2)}{2}}。$$

因此 $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$，所以随机变量 X 和 Y 不相互独立。

知识点 31　二维离散型随机变量函数的分布

更多资源请扫二维码:

31.1　结论

1. 结论

结论 31.1.1　若 (X,Y) 是离散型随机变量，则求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律：首先根据 X 和 Y 的取值，计算 $Z=g(X,Y)$ 相应取值，并求出对应的概率，然后将所有取相同值的概率相加，由此产生随机变量 Z 的分布律。

结论 31.1.2　设以下随机变量 X,Y 相互独立，

（1）若 $X\sim b(n_1,p)$，$Y\sim b(n_2,p)$，则 $X+Y\sim b(n_1+n_2,p)$；

（2）若 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

注：上述结论称为分布的可加性，即二项分布和泊松分布具有可加性。

结论 31.1.3　若 (X,Y) 是离散型随机变量，$Z_1=g_1(X,Y)$ 和 $Z_2=g_2(X,Y)$ 为 (X,Y) 的函数所构成的随机变量，则 (Z_1,Z_2) 也为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\left\{Z_1=a,Z_2=b\right\}=\sum_{\substack{g_1(x_i,y_j)=a\\ g_2(x_i,y_j)=b}}P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}。$$

31.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 23，知识点 25
- **主要题型**：（1）求二维离散型随机变量函数的分布；（2）离散型及连续型随机变量所构成随机变量函数的分布；（3）求二维离散型随机变量函数的数字特征。
- **综述**：求二维离散型随机变量函数的分布相对较容易，只须先确定随机变量的取值范围，再确定随机变量取每个值的概率即可；求离散型及连续型随机变量所构成随机变量函数的分布时，可将其视为求事件的概率，通过事件的等价表示来计算；二维离散型随机变量函数的数字特征可直接根据公式计算。

31.3　经典例题精解巧析

例 31.3.1　（难度系数 0.4）　设 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

求：（1）$Z_1 = X+Y$；（2）$Z_2 = X-Y$；（3）$Z_3 = XY$ 的分布律。

解析：求二维离散型随机变量函数的分布律的常用方法是，针对函数的各种取值情况，等价地对应 (X,Y) 的各种取值，最后将其概率相加。

解：（1）$Z_1 = X+Y$ 的取值为 0，1，2，3。因为 $\{Z_1=0\}=\{X=0,Y=0\}$，所以

$$P\{Z_1=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{6}。$$

又因为 $\{Z_1=1\}=\{X=0,Y=1\}+\{X=1,Y=0\}$，所以

$$P\{Z_1=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}。$$

同理，$P\{Z_1=2\}=0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，　$P\{Z_1=3\}=\frac{1}{6}$。故 $Z_1=X+Y$ 的分布律为

Z_1	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

（2）同样可求 $Z_2 = X-Y$ 的分布律为

Z_2	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3）同样可求 $Z_3 = XY$ 的分布律为

Z_3	0	1	2
p_k	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

例 31.3.2（难度系数 0.6）　设 ξ、η 是两个相互独立同分布的随机变量，如果 ξ 的分布律为 $P\{\xi=i\}=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$，求 $X=\max(\xi,\eta)$ 与 $Y=\min(\xi,\eta)$ 的分布律。

解析：求离散型随机变量函数的分布，首先确定随机变量函数的取值，然后求随机变量取每个值的概率，由此产生随机变量函数的分布律。

解：$X=\max(\xi,\eta)$ 的取值为 1，2，3。

$$P\{X=1\}=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{9}；$$

$$P\{X=2\}=P\{\xi=2,\eta=1\}+P\{\xi=1,\eta=2\}+P\{\xi=2,\eta=2\}=\frac{3}{9}；$$

$P\{X=3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=\dfrac{5}{9}$。

故 $X=\max(\xi,\eta)$ 分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

类似地求出 $Y=\min(\xi,\eta)$ 分布律为

Y	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

例 31.3.3（难度系数 0.6）设 X_1 和 X_2 独立，$P\{X_i=1\}=p$，$P\{X_i=2\}=1-p\,(i=1,2)$，令 $X=\begin{cases}1，若X_1+X_2为奇数\\0，若X_1+X_2为偶数\end{cases}$；求 X^2 的概率分布律。

解析： 同例 31.3.2。

解： X^2 的可能值为 0、1，取每个值的概率为

$P\{X^2=0\}=P\{X_1=1,X_2=1\}+P\{X_1=2,X_2=2\}=p^2+(1-p)^2=1-2p+2p^2$；

$P\{X^2=1\}=P\{X_1=1,X_2=2\}+P\{X_1=2,X_2=1\}=2p-2p^2$。

故 X^2 的分布律为

X^2	0	1
P	$1-2p+2p^2$	$2p-2p^2$

例 31.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 33，2006 年考研数学四真题）　设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a、b、c 为常数,且 X 的数学期望 $E(X)=-0.2$, $P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=0.5$,记 $Z=X+Y$，求：（1）a、b、c 的值；（2）Z 的分布律；（3）$P\{X=Z\}$。

解析： 要求 a、b、c 的值，只需要找到三个含有 a、b、c 的等式即可，这可以由分布函数的性质及题设中所给的两个条件得到。求 Z 的概率分布，首先要弄清楚 Z 的所有可能取值，由 X、Y 的取值可知，Z 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2$，然后再求 Z 取各个值的概率。要求 $P\{X=Z\}$，只需要转化为求关于 X、Y 的概率，由 $P\{X=Z\}=P\{X=X+Y\}=P\{Y=0\}$，即可得出结论。

解：（1）由联合分布律的性质知，$a+b+c+0.6=1$，即 $a+b+c=0.4$。

由 $E(X)=-0.2$，可得 $-a+c=-0.1$。再由

$$P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=\frac{P\{Y\leqslant 0,\ X\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5\text{，得 } a+b=0.3\text{。}$$

联立上述关于 a、b、c 的三个等式，解得 $a=0.2$，$b=0.1$，$c=0.1$。

（2）Z 的可能取值为−2,−1,0,1,2, 且

$P\{Z=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=0.2$，

$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=-1\}=0.1$，

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.3$，

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.3$，

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$。

即 Z 的分布律为

Z	−2	−1	0	1	2
p	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

（3）$P\{X=Z\}=P\{X=X+Y\}=P\{Y=0\}=0+b+0.1=0.2$。

例 31.3.5（难度系数 0.6，2003 年考研数学三真题） 设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的分布律为 $X\sim\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$。

解析：本题是求随机变量函数的概率密度,此处的随机变量一个是离散型,另一个是连续型；求解时先求分布函数,求解过程中根据 X 的不同取值，利用全概率公式可求解。

解：设 $F(y)$ 为 y 的分布函数,则由全概率公式及 X 与 Y 的独立性可知，$U=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}G(u)=P\{U\leqslant u\}&=P\{X+Y\leqslant u\}\\&=P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=2\}\\&=0.3P\{X+Y\leqslant u\mid X=1\}+0.7P\{X+Y\leqslant u\mid X=2\}\\&=0.3P\{Y\leqslant u-1\mid X=1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\mid X=2\}\\&=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}=0.3F(u-1)+0.7F(u-2)\end{aligned}$$

由此得 $g(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$。

例 31.3.6（难度系数 1.0，2009 年考研数学一、三真题） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的分布律为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点的个数为（ ）。

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3

解析：利用随机变量函数的联合分布律求其分布函数，关键是利用全概率公式计算

事件发生的概率。

解： $Z=XY$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z|Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z|Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z|Y=1\}。$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{X\leqslant z|Y=1\}=\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\}=\frac{1}{2}\varPhi(z)$，$F_Z(z)$ 连续；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z|Y=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varPhi(z)$，$F_Z(z)$ 连续。

$\lim\limits_{z\to0^-}F_Z(z)=\frac{1}{2}\varPhi(0)=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{z\to0^+}F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varPhi(0)=\frac{3}{4}$。

故 $F_Z(z)$ 在 $z=0$ 间断，$F_Z(z)$ 只有一个间断点，选择（B）。

知识点 32　二维连续型随机变量函数的分布

更多资源请扫二维码:

32.1　结论

结论 32.1.1　设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，若要求随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布，通常是先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，然后通过求导计算得概率密度函数 $f_Z(z)$。

结论 32.1.2 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则：

（1）两个随机变量 X 与 Y 的和 $Z=X+Y$ 的概率密度，可用如下的卷积公式求解：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x；$$

特别地，当 X 与 Y 独立时，它们的和 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x。$$

（2）两个随机变量 X 与 Y 的差 $Z=X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+z,x)\mathrm{d}x。$$

（3）两个随机变量 X 与 Y 的积 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x。$$

结论 32.1.3 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，X 与 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，则

（1）$Z_1=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_1(z)=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F(z,z)\text{。}$$

（2）$Z_2=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_2(z)&=P\{Z_2\leqslant z\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{(X\leqslant z)\cup(Y\leqslant z)\}\\&=P\{X\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z\}-P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)\text{。}\end{aligned}$$

结论 32.1.4　设 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，若 X、Y 相互独立，则

$$X+Y\sim N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\text{，}$$

而且 $aX+bY$ 也服从正态分布。

结论 32.1.5　对于相互独立而且服从相同分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，可以证明有下面三个重要结论：

（1）设 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $S\sim N(n\mu,n\sigma^2)$；

（2）设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$；

（3）设 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$，则 $U\sim N(0,1)$。

32.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 23，知识点 26
- **主要题型**：二维连续型随机变量函数的分布，特别注意随机变量的和、差、最大、最小函数的分布。
- **综述**：为了求二维连续型随机变量函数的概率密度，一般先根据事件的等价表示求其分布函数，再对其求偏导数可得概率密度函数，由于二维连续型随机变量的分布往往是分片函数，所以求函数的分布时需特别注意对区间的处理。

32.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 27.3.6，　例 28.3.6

例 32.3.1（难度系数 0.4）　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0\text{，} & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；2）$Z=X+Y$ 的概率密度。

解析：（1）已知联合概率密度可利用公式求边缘概率密度；（2）对随机变量和的概

率密度，可用卷积公式求解，利用该公式时要注意根据实际问题定上下限。

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & x>0\end{cases}$

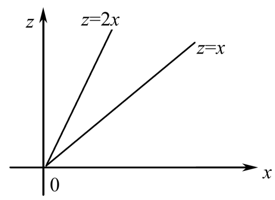
$=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-y}, & y>0。\end{cases}$$

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，而 $f(x,z-x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\ x<z\leqslant 2x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$ 当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-z}$，所以

$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$。



例 32.3.2（难度系数 0.6）　假设一电路装有三个同种电子元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 λ 的指数分布，当三个元件都无故障时，电路才能正常工作，否则电路不能正常工作。求电路正常工作时间 T 的概率密度。

解析：求连续型随机变量函数的概率密度函数,一般先从求分布函数出发,结合图形对自变量的取值范围进行讨论,求出分布函数,然后求导即得概率密度函数。

解：设三个电子元件无故障工作时间分别为 X_1、X_2、X_3，则它们相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$；电路正常工作时间 $T=\min\{X_1,X_2,X_3\}$，其取值范围为 $(0,+\infty)$，分布函数 $F_T(t)=P\{T\leqslant t\}$，则

当 $t\leqslant 0$ 时，$F_T(t)=0$；

当 $t>0$ 时，$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{\min\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}$

$=1-P\{\min\{X_1,X_2,X_3\}>t\}=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}$

$=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}=1-[1-F(t)]^3=1-\mathrm{e}^{-3\lambda t}$。

故电路正常工作时间 T 的分布函数 $F_T(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$。则 T 的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}3\lambda\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0。\end{cases}$$

例 32.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 29）　随机变量 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-3x-4y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

分别求下列随机变量的概率密度函数：（1）$Z=X+Y$；（2）$M=\max\{X,Y\}$；（3）$N=\min\{X,Y\}$。

解析：（1）可通过卷积公式求两个随机变量和的分布，也可以先求 $Z=X+Y$ 的分布函数，再通过求导来求概率密度函数；（2）与（3）一样也是先求分布函数再求导，计算量较大。

解：由于 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y=3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, x\leqslant 0;\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, y\leqslant 0。\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X、Y 相互独立。

（1）当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^z\mathrm{e}^{-3x}\left[1-\mathrm{e}^{-4(z-x)}\right]\mathrm{d}x=\left(-\mathrm{e}^{-3x}-3\mathrm{e}^{x-4z}\right)\Big|_0^z=1-4\mathrm{e}^{-3z}+3\mathrm{e}^{-4z}。$$

即 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-4\mathrm{e}^{-3z}+3\mathrm{e}^{-4z}, & z\geqslant 0\end{cases}$，所以 Z 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 12\mathrm{e}^{-3z}-12\mathrm{e}^{-4z}, & z\geqslant 0\end{cases}$。

（2）当 $z<0$ 时，$F_M(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_M(z)=P(M\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)$$

$$=F_X(z)F_Y(z)=\left(1-\mathrm{e}^{-3z}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-4z}\right)。$$

即 $F_M(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \left(1-\mathrm{e}^{-3z}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-4z}\right), & z\geqslant 0\end{cases}$，所以

$$f_M(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 3\mathrm{e}^{-3z}(1-\mathrm{e}^{-4z})+4\mathrm{e}^{-4z}(1-3^{-3z}), & z>0\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0,\\ 3\mathrm{e}^{-3z}+4\mathrm{e}^{-4z}-7\mathrm{e}^{-7z}, & z>0。\end{cases}$$

（3）当 $z<0$ 时，$F_N(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_N(z)=P(N\leqslant z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-\mathrm{e}^{-3z}\mathrm{e}^{-4z}=1-\mathrm{e}^{-7z}。$$

即 $F_N(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\mathrm{e}^{-7z}, & z\geqslant 0\end{cases}$，所以 $f_N(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 7\mathrm{e}^{-7z}, & z>0\end{cases}$。

例 32.3.4（难度系数 0.8，2007 年考研数学一、三、四真题）　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）$P\{X>2Y\}$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

解析： 本题考查涉及二维随机变量(X,Y)的概率计算问题与随机变量和的分布。

解：（1）$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x-\frac{5}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$。

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$。

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x), & 0<x<1,\ 0<z-x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-z, & 0<x<1,\ 0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

当$z\leqslant 0$或$z\geqslant 2$时，$f_Z(z)=0$；当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\mathrm{d}x=z(2-z)$；当$1\leqslant z<2$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}x=(2-z)^2$，故$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

例 32.3.5（难度系数 0.6，2008 年考研数学一、三、四真题）　设随机变量X、Y相互独立且同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为（　　）。

（A）$F^2(x)$　（B）$F(x)F(y)$　（C）$1-[1-F(x)]^2$　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$

解析： 本题考查二维随机变量函数的独立性和函数的分布。

由于X、Y相互独立且同分布，故Z的分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F^2(z)$，故选择（A）。

解：（A）。

第 3 篇综合测试题

综合测试题 A

A3.1　设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-8x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布密度。（知识点 23，难度系数 0.6）

A3.2　设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求边缘分布函数。（知识点 24，难度系数 0.4）

A3.3　将一硬币抛掷三次，以X表示在三次中出现正面的次数，以Y表示三次中出

现正面次数与出现反面次数之差的绝对值，试写出 X 和 Y 的边缘分布函数。（知识点 24，难度系数 0.8）

A3.4　将一硬币抛掷三次，以 X 表示在三次中出现正面的次数，以 Y 表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值，试写出 X 和 Y 的联合分布律。（知识点 25，难度系数 0.2）

A3.5　设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余值填入表中空白处。（知识点 25，难度系数 0.8）

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_i)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$			1

A3.6　设 ξ、η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，并且它们的分布律为 $P(\xi=i)=\dfrac{1}{3}, i=1,2,3$，又设 $X=\max(\xi,\eta)$，$Y=\min(\xi,\eta)$，试写出二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律。（知识点 25，难度系数 0.6，跨知识点综合题）

A3.7　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$。（知识点 26，难度系数 0.2）

A3.8　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(4-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant 16,\\ 0\quad, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）系数 C；（2）(X,Y) 落在圆 $x^2+y^2\leqslant r^2 (r<4)$ 内的概率。（知识点 26，难度系数 0.6）

A3.9　设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2，2<y<4，\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）常数 k；（2）$P\{X<1,Y<3\}$；（3）$P\{X<1.5\}$；（4）$P\{X+Y\leqslant 4\}$。（知识点 26，难度系数 0.6）

A3.10　设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求关于 X 与 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$。（知识点 27，难度系数 0.2）

A3.11 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（1）试确定常数 C；（2）求边缘概率密度。（知识点 27，难度系数 0.6）

A3.12 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}，-\infty<x,y<+\infty，$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。（知识点 28，难度系数 0.6）

A3.13 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$。（知识点 28，难度系数 0.8）

A3.14 若二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下：

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
2	a	b

且 X、Y 相互独立，则常数 $a=$______，$b=$______。（知识点 29，难度系数 0.2）

A3.15 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

问随机变量 X、Y 是否相互独立？（知识点 29，难度系数 0.4）

A3.16 随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从 $(0,3)$ 上的均匀分布，Y 服从 $\lambda=2$ 的指数分布，求随机变量 (X,Y) 的联合概率密度，并计算概率 $P\{X\leqslant Y\}$。（知识点 29，难度系数 0.6）

A3.17 在 $(0,6)$ 中任取两数，求两个数乘积不超过 6 的概率。（知识点 30，难度系数 0.4）

A3.18 设 (X,Y) 在 $G=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 3,\ 1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上服从均匀分布，求 $|X-Y|=Z$ 的概率密度。（知识点 30，难度系数 0.8）

A3.19 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x\ (0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布。求：（1）随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；（2）Y 的概率密度；（3）概率 $P\{X+Y>1\}$。（知识点 30，难度系数 0.8）

A3.20 设相互独立的两个随机变量 X、Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$，求随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律。（知识点 31，难度系数 0.4）

A3.21 已知 $P\{X=k\}=\dfrac{a}{k}$，$P\{Y=-k\}=\dfrac{b}{k^2}$，$k=1,2,3$，随机变量 X 与 Y 相互独立，

确定 a、b 的值，求出 (X,Y) 的联合分布律以及 $X+Y$ 的分布律。（知识点 31，难度系数 0.6）

A3.22　设随机变量 X_1、X_2、X_3、X_4 独立同分布：$P(X_i=0)=0.6$，$P(X_i=1)=0.4$，$i=1,2,3,4$。求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的分布律。（知识点 31，难度系数 0.8）

A3.23　假设随机变量 U 在区间 $(-2,2)$ 上服从均匀分布，随机变量 $X=\begin{cases} -1, & 若U\leqslant -1 \\ 1, & 若U>-1 \end{cases}$，$Y=\begin{cases} -1, & 若U\leqslant 1 \\ 1, & 若U>1 \end{cases}$。试求：（1）$X$、$Y$ 的联合概率密度；（2）$D(X+Y)$。（知识点 32，难度系数 0.8，2002 年考研数学三真题）

A3.24　设 X、Y 相互独立，其概率密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} Ae^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\leqslant 0 \end{cases}$。求：（1）常数 A，（2）随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。（知识点 32，难度系数 0.8）

A3.25　若 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x>0，y>0, \\ 0, & 其他。 \end{cases}$$

试求：（1）常数 A；（2）$P\{X<2,Y<1\}$；（3）X 的边缘分布；（4）$P\{X+Y<2\}$；（5）$f_{X|Y}(x|y)$；（6）$P\{X<2|Y<1\}$。（知识点 32，难度系数 0.6）

综合测试题 B

B3.1　设随机变量 X 与 Y 是相互独立的，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-4y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0。 \end{cases}$$

求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$。（难度系数 0.8）

B3.2　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\geqslant 0，y\geqslant 0, \\ 0 & ，其他。 \end{cases}$$

问随机变量 X、Y 是否相互独立？（知识点 24，难度系数 0.6）

B3.3　某射手在射击中，每次击中目标的概率为 $p\ (0<p<1)$，射击进行到第二次击中目标为止，用 X_k 表示第 k 次击中目标时射击的次数 $(k=1,2)$，求 X_1 和 X_2 的联合分布律和条件分布律。（知识点 25，难度系数 0.8）

B3.4 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $b(1,p)$ 分布，其中 $0<p<1$。令

$$\xi=\min(X,Y),\quad \eta=\max(X,Y)。$$

试求 $(\xi,\ \eta)$ 的联合分布律，以及 ξ 与 η 各自的边缘分布律，并指出 ξ 与 η 是否相互独立。（知识点 25，难度系数 0.8）

B3.5 设随机变量 X 与 Y 是相互独立的，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$$

求：（1）$P\{X<2,Y<1\}$；（2）$P\{(X,Y)\in D\}$，其中 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0,3x+4y<3\}$。（知识点 26，难度系数 0.8，跨知识点综合题）

B3.6 随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}\quad \text{令 } Y=X^2,$$

$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求：（1）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（2）$F(-\frac{1}{2},4)$。

（知识点 27，难度系数 0.8，2006 年考研数学四真题）

B3.7 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\quad 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）关于 X 与 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

（3）$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$。（知识点 28，难度系数 1.0，2005 年考研数学一真题）

B3.8 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

求：（1）条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$；（2）条件概率 $P\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}$。（知识点 28，难度系数 1.0，2009 年考研数学一真题）

B3.9 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则______。（知识点 29，难度系数 1.0，2002 年考研数学一真题）

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

（B）$f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

（C）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

（D）$F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

B3.10　设随机变量 X 以概率 1 取值 0，而 Y 是任意的随机变量，证明 X 与 Y 相互独立。（知识点 29，难度系数 0.8）

B3.11　设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布,试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度函数 $f(s)$。（知识点 30，难度系数 0.8，1999 年考研数学一真题）

B3.12 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上均匀分布，其中 $D=\{(x,y):\ |x|+|y|\leqslant 1\}$，又设 $U=X+Y$，$V=X-Y$，试求：（1）U 与 V 的概率密度 $f_U(u)$ 与 $f_V(v)$；（2）U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$ 和相关系数 ρ_{UV}。（知识点 30，难度系数 1.0，跨知识点 35，36）

B3.13　设 X、Y 是相互独立的随机变量，它们都服从参数为 n、p 的二项分布，证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $2n$、p 的二项分布。（知识点 31，难度系数 0.8，跨知识点 16）

B3.14　设随机变量 X 与 Y 相互独立，且同分布于 $b(1,p)(0<p<1)$。令

$$Z=\begin{cases}1, & 若X+Y为偶数,\\ 0, & 若X+Y为奇数。\end{cases}$$

（1）求 Z 的分布律；（2）求 (X,Z) 的联合分布律；（3）问 p 取何值时 X 与 Z 独立?为什么?（知识点 31，难度系数 1.0）

B3.15　设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为

X	1　　2
P	$\frac{2}{3}$　　$\frac{1}{3}$

记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$。求：（1）(U,V) 的联合分布律；（2）U、V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$。（知识点 31，难度系数 0.6，跨知识点 35，2007 年考研数学一真题）

B3.16　若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且均服从指数分布，参数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，试求 $\eta=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 的概率密度函数。（知识点 32，难度系数 0.6）

B3.17　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。（知识点 32，难度系数 0.8）

第 3 篇综合测试题详解

综合测试题 A 详解

A3.1 解析： 对连续型随机变量，已知联合分布函数，可通过求对 x 与 y 的偏导函数得到联合概率密度。

解：$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-(8x+\frac{1}{2}y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

A3.2 解析： 已知联合分布函数，可利用公式求边缘分布函数。

解： 二维随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-3^{-x}，0\leqslant x,\\ \quad 0, \quad 其他。\end{cases},$$

二维随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-3^{-y}，0\leqslant y,\\ \quad 0, \quad 其他。\end{cases}$$

A3.3 解析： 为求二维离散型随机变量的边缘分布函数，一般需先求出联合分布律，再求出边缘分布律，最后求出边缘分布函数。

解： 先求 (X,Y) 的联合分布律，具体结果如下：

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$C_3^1\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$C_3^2\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

再求边缘分布律

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	1	3
p_k	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

因此边缘分布函数分别为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{8}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{7}{8}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\leqslant y<3,\\ 1, & y\geqslant 3。\end{cases}$.

A3.4 解析：求随机变量的联合分布律，关键在于首先弄清楚二维随机变量的所有可能取值，其次计算随机变量取每个值的概率。

解：X 和 Y 的联合分布律如下：

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$C_3^1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	$C_3^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

A3.5 解析：若已知联合分布律和边缘分布律的某些值，可利用两者之间的关系求其余值。

解：设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$i=1,2$，$j=1,2,3$。由联合分布和边缘分布的关系知 $p_{11}+p_{12}=p_{11}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，故计算得 $p_{11}=\frac{3}{8}$。

由于随机变量 X 与 Y 相互独立，所以 $p_{11}=p_{1\cdot}\times p_{\cdot1}=\frac{1}{2}\times(p_{11}+\frac{1}{8}+p_{13})$，即 $\frac{3}{8}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+p_{13})$，故 $p_{13}=\frac{1}{4}$，因此 $p_{1\cdot}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=\frac{1}{4}$。

同理，由 $p_{22}=(\frac{1}{8}+p_{22})\times\frac{1}{4}$，可得 $p_{22}=\frac{1}{24}$，且 $p_{\cdot2}=p_{12}+p_{22}=\frac{1}{6}$。

$$p_{\cdot3}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3},\quad p_{23}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}。$$

所以 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

A3.6 解析： 为求二维随机变量的联合分布律，一方面要清楚二维随机变量的所有可能的取值，另一方面求随机变量取每对值的概率，而求概率的关键在于清楚该事件的含义。

解： 依题意，X 的可能值为 1,2,3，Y 的可能值为 1,2,3。

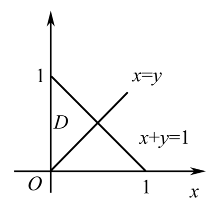
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\ \min(\xi,\eta)=1\}=P\{\xi=1,\eta=1\}=\frac{1}{9}。$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=2,\ \min(\xi,\eta)=1\}=P\{\xi=2,\eta=1\}+P\{\xi=1,\eta=2\}=\frac{2}{9}。$$

以此类推可求出 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下：

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

A3.7 解析： 在已知联合概率密度的情况下，常用二重积分 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 计算事件发生的概率。



解： 如右图所示，可得

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_D 6x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}。$$

A3.8 解析： 首先利用二维随机变量概率密度的性质确定常数，然后用二重积分计算相关事件概率。

解 ：（1）因为

$$1=C\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}(4-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\pi 64-C\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=C\left[\pi 64-\frac{128\pi}{3}\right]=C\cdot\frac{\pi 64}{3},$$

所以 $C=\dfrac{3}{64\pi}$。

（2）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$，所求概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\frac{3}{64\pi}(4-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{64\pi}\left[\pi 4r^2-\frac{2\pi r^3}{3}\right]=\frac{3r^2}{16}\left[1-\frac{2r}{12}\right]。$$

A3.9 解析：同 A3.8 题的解析。

解：（1）由归一性，$F(+\infty,+\infty)=\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=\int_0^2 k(6-2x)dx=8k=1$，所以 $k=\frac{1}{8}$；

（2）$P\{X<1,Y<3\}=\frac{1}{8}\int_0^1 dx\int_2^3(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_0^1(\frac{7}{2}-x)dx=\frac{3}{8}$；

（3）$P\{X<1.5\}=\frac{1}{8}\int_0^{1.5} dx\int_2^4(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}$；

（4）$P\{X+Y\leqslant 4\}=\frac{1}{8}\iint\limits_{x+y\leqslant 4}(6-x-y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_2^{4-x}(6-x-y)dy$

$$=\frac{1}{16}\int_0^2(12-8x+x^2)dx=\frac{2}{3}。$$

A3.10　解析：求边缘概率密度时，关键是求出随机变量 X 和 Y 可能值范围内的边缘密度表达式，因此首先要确定 X 和 Y 的取值范围，在此范围中通过积分求概率密度函数，其他范围概率密度函数的值为零。

解：关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

A3.11　解析：首先利用联合概率密度的性质求常数 C，然后利用公式积分计算边缘概率密度。

解：（1）根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 Cx^2ydy=\frac{4}{21}C=1$，得 $C=\frac{21}{4}$。

（2）关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy, -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0，其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0，其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

A3.12　解析：首先由概率密度的性质求常数 A，然后求出边缘概率密度后直接套公式求条件概率密度。

解：（1）由概率密度的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\,\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}\,\mathrm{d}x=A\pi=1\text{，故 }A=\frac{1}{\pi}\text{。}$$

（2）关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}y$$

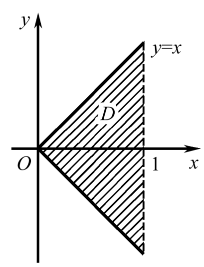
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\quad（-\infty<x<+\infty）$$

（3）所求条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\quad（-\infty<y<+\infty）。$$

A3.13　解析：按公式，先求边缘概率密度，再求条件概率密度；关键在于求出可能值范围内的条件概率密度表达式。



解： X、Y 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=$

$$\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1\mathrm{d}x=1+y, & -1<y<0,\\ \int_{y}^{1}1\mathrm{d}x=1-y, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

所以在 $X=x\,(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & |\,y\,|<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

在 $Y=y\ (-1<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ \dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

A3.14　解析： 利用离散型随机变量相互独立的定义，可确定联合分布律中的未知常数。

解： 因 X、Y 相互独立，则 $P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}$，即

$$\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\right)\left(\frac{1}{16}+a\right),$$

得 $a=\dfrac{3}{16}$。又 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$，故 $\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}+a+b=1$，得 $b=\dfrac{9}{16}$。

A3.15　解析： 本题考查边缘概率密度的求解及利用边缘概率密度判别随机变量的独立性。

解：X、Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0\end{cases}=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0\ , & y<0,\\ \mathrm{e}^{-y}, & y>0。\end{cases}$$

因此 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 成立，所以 X、Y 独立。

A3.16　解析： 首先明确均匀分布和指数分布的相关概念，然后利用随机变量 X 和 Y 相互独立可求出联合概率密度，再利用联合概率密度计算事件概率。

解： 依题知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

由于 X 与 Y 相互独立，因此随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2y}, & 0\leqslant x\leqslant 3,\ y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$P\{X\leqslant Y\}=\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^3\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\int_0^3\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left(1-\mathrm{e}^{-6}\right)。$$

A3.17　解析： 本题考查二维均匀分布的概念及相关问题的计算。

解： 设所取的两个数为 X、Y，则它们是独立的均服从 $(0,6)$ 上的均匀分布，故 (X,Y)

的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{36},\ 0<x<6,0<y<6\\ 0,\qquad\qquad 其他\end{cases}$，故

$$P\{XY<6\}=\iint\limits_{0<xy<6}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^6\frac{1}{36}\mathrm{d}y+\int_1^6\mathrm{d}x\int_0^{\frac{6}{x}}\frac{1}{36}\mathrm{d}y=\frac{1+\ln 6}{6}。$$

A3.18　解析：本题考查服从二维均匀分布的随机变量函数的分布。

解：由条件知，(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$，因此

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X-Y|\leqslant z\}=\iint\limits_{|x-y|\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$；当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iint\limits_{|x-y|\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1-\left[3-(1+z)\right]^2}{4}=1-\frac{1}{4}(2-z)^2，所以$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 1-\dfrac{1}{4}(2-z)^2, & 0<z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}，故\ f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-z), & 0<z<2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

A3.19　解析：本题考查条件概率密度及联合概率密度之间的关系，同时考查边缘概率密度及二维随机变量概率的计算。

解： X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，其概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$ 在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，其条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<y<x,\\ 0,\quad 其他。\end{cases}$$

（1）X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（2）Y 的取值范围为 $(0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$。

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y$，故 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（3）$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x\frac{1}{x}\mathrm{d}y=1-\ln 2$。

A3.20　解析：首先要根据随机变量 Z 的定义确定 Z 的取值范围，然后求 Z 取各个值的概率即可。

解：由于 X、Y 仅取 0、1 两个数值，故 Z 也仅取 0 和 1 两个数值，因 X、Y 相互独

立，故

$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}。$$

所以得 Z 的分布律为

Z	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

A3.21　解析： 首先利用分布律的归一性确定常数，其次利用随机变量的独立性确定联合概率分布，最后求函数的分布。

解： 由归一性 $\sum_k P(X=k)=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\frac{11a}{6}=1$，所以 $a=\frac{6}{11}$。由归一性 $\sum_k P(Y=-k)=b+\frac{b}{4}+\frac{b}{9}=\frac{49b}{36}=1$，所以 $b=\frac{36}{49}$。

根据随机变量相互独立，可求出 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-3	-2	-1
1	$\frac{24}{539}$	$\frac{54}{539}$	$\frac{216}{539}$
2	$\frac{12}{539}$	$\frac{27}{539}$	$\frac{108}{539}$
3	$\frac{8}{539}$	$\frac{18}{539}$	$\frac{72}{539}$

由于 $P\{X+Y=-2\}=\frac{24}{539}$，所以 $P\{X+Y=-1\}=\frac{66}{539}=\frac{6}{49}$，

$$P\{X+Y=0\}=\frac{251}{539},\quad P\{X+Y=1\}=\frac{126}{539},\quad P\{X+Y=2\}=\frac{72}{539}。$$

故 $X+Y$ 的分布律为

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{24}{539}$	$\frac{66}{539}$	$\frac{251}{539}$	$\frac{126}{539}$	$\frac{72}{539}$

A3.22　解析： 求离散型随机变量函数的分布律的步骤是，首先确定随机变量函数的取值，然后求随机变量取每个值的概率，由此列出随机变量函数的分布律。

解： $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}=X_1X_4-X_2X_3$；$X$ 的可能取值为 $-1,0,1$。

$$\begin{aligned}P\{X=-1\}&=P\{X_1X_4=0,\ X_2X_3=1\}\\&=P\{\{X_1=0,\ X_4=1\}\cup\{X_1=1,X_4=0\}\cup\{X_1=0,X_4=0\}\{X_2=1,X_3=1\}\}\\&=[P\{X_1=0,X_4=1\}+P\{X_1=1,X_4=0\}+P\{X_1=0,X_4=0\}P\{X_2=1,X_3=1\}]\end{aligned}$$

$$=[0.6\times0.4+0.6\times0.4+0.36]\times0.16=0.1344\text{。}$$

同理可求出 $P\{X=0\}=0.7312, P\{X=1\}=0.1344$，即 X 的分布律为

X	-1	0	1
0	0.1344	0.7312	0.1344

A3.23　解析：本题考查（1）二维离散型随机变量函数的分布；（2）随机变量方差的计算。

解：（1）随机变量 (X,Y) 有四对可能值：$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$。

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant-1,U\leqslant1\}=\frac{1}{4}，\ P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant-1,U>1\}=0，$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant1\}=\frac{1}{2}，\ P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}\text{。}$$

于是得 X 和 Y 的联合分布律为

$$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\text{。}$$

（2）$X+Y$ 和 $(X+Y)^2$ 的分布律分别为 $X+Y\sim\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$(X+Y)^2\sim\begin{bmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

由此可见 $E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0$，$D(X+Y)=E(X+Y)^2=2$。

A3.24 解析：求随机变量函数的分布是考试的重点，对于求连续型随机变量函数的联合概率密度，一般从求分布函数出发，结合图形对自变量的取值范围进行讨论，求出分布函数，然后求导即得联合概率密度。

解：（1）由于 $1=F_Y(+\infty)=\int_0^{+\infty}Ae^{-y}dy=-Ae^{-y}\Big|_0^{+\infty}=A$，所以 $A=1$。

（2）随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$，其中 $0<x<1,\ z-x>0$。

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z 1\cdot e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^z e^x dx=1-e^{-z}$；

当 $z\geqslant1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^1 e^x dx=e^{-z+1}-e^{-z}$。所以 $f(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}, & 0\leqslant z<1,\\ e^{-z+1}-e^{-z}, & z\geqslant1\text{。}\end{cases}$

A3.25 解析：本题考查联合概率密度的性质和相关概率的计算方法。

解：（1）$1=\int_0^{\infty}Ae^{-2x}dx\int_0^{\infty}e^{-y}dy=A\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty}\cdot\left(-e^{-y}\big|_0^{\infty}\right)=\frac{A}{2}$，故 $A=2$。

（2）$P\{X<2,Y<1\}=\int_0^2 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\left(-\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^2\right)\left(-\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^1\right)=\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$。

（3）X 的边缘概率密度为 $f_X(x)$，当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}，即\ f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

（4）$P\{X+Y<2\}=\int_0^2 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^2 2\mathrm{e}^{-2x}\left[1-\mathrm{e}^{-(2-x)}\right]\mathrm{d}x\int_0^2\left[2\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{-(2+x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)+\left(2\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-2}\right)=1+\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-2}=\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)^2。$$

（5）当 $x<0$，$y>0$ 时，$f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=0$；

当 $x>0$，$y>0$ 时，$f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{2\mathrm{e}^{-(2x+y)}}{\mathrm{e}^{-y}}=2\mathrm{e}^{-2x}$。

（6）$P\{Y<1\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^1=1-\mathrm{e}^{-1}$,利用（2）的结果可得 $P\{X<2\mid Y<1\}=\dfrac{P\{X<2,Y<1\}}{P\{Y<1\}}=\dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)}{1-\mathrm{e}^{-1}}=1-\mathrm{e}^{-4}$。

综合测试题 B 详解

B3.1 解析：在随机变量独立的条件下，已知边缘概率密度可求联合概率密度，再利用联合概率密度可求联合分布函数。注意:（1）区间与区间的对应;（2）不同区间有不同的积分上下限。

解：随机变量 X 与 Y 相互独立，故联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-3x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

当 $x>0$，$y>0$ 时，有 $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y})$，其他情形，$F(x,y)$=0。故联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

B3.2 解析：边缘分布函数的求解，也可以先求边缘概率密度，然后再求边缘分布函数。

解：X、Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \mathrm{e}^{-y}, & y>0。\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X\left(x\right)f_Y(y)$，所以随机变量 X 与 Y 相互独立。

B3.3 解析：为了求二维随机变量的分布律，一方面要了解二维随机变量的所有可能取值，另一方面求随机变量取每对值的概率，而求概率的关键在于对每对值对应的事件的理解。

解： X_1 和 X_2 的可能取值为 $X_1=i$，$X_2=j$，$i<j$，$j=2,3,\cdots$ 故联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X_1=i,X_2=j\}=p^2q^{j-2}\quad(q=1-p，i<j，j=2,3,\cdots)；$$

X_1 的边缘分布律为 $p_{i\cdot}=P\{X_1=i\}=pq^{i-1}(i=1,2,\cdots)$；$X_2$ 的边缘分布律为

$$p_{j\cdot}=P\{X_2=j\}=(j-1)p^2q^{j-2}(j=2,3,\cdots)。$$

因此在 $\{X_2=j\}$ 条件下的 X_1 条件分布律为 $P\left\{X_1=i\,|\,X_2=j\right\}=\dfrac{1}{j-1}(i=1,2,\cdots)$；在 $\{X_1=i\}$ 条件下的 X_2 条件分布律为 $P\left\{X_2=j\,|\,\mathrm{X}_1=i\right\}=pq^{j-i-1}(j=i+1\cdots)$。

B3.4 解析：考查二维随机变量联合分布律的计算及两个随机变量独立性的判定。

解：由于 X 与 Y 都取值 0 与 1，且 $\xi=\min\left(X,Y\right)$，$\eta=\max\left(X,Y\right)$，可知 ξ 与 η 也取值 0 与 1；根据两对随机变量的对应关系得

$$P\left\{\xi=0,\quad\eta=0\right\}=P\left\{X=0,\quad Y=0\right\}=P\left\{X=0\right\}P\left\{Y=0\right\}=\left(1-p\right)^2；$$

$$\begin{aligned}P\left\{\xi=0,\quad\eta=1\right\}&=P\left\{X=0,\quad Y=1\right\}+P\left\{X=1,\quad Y=0\right\}\\&=P\left\{X=0\right\}P\left\{Y=1\right\}+P\left\{X=1\right\}P\left\{Y=0\right\}=2p\left(1-p\right)；\end{aligned}$$

$$P\left\{\xi=1,\quad\eta=0\right\}=P\left(\varnothing\right)=0；$$

$$P\left\{\xi=1,\quad\eta=1\right\}=P\left\{X=1,\quad Y=1\right\}=P\left\{X=1\right\}P\left\{Y=1\right\}=p^2。$$

所以 $\left(\xi,\eta\right)$ 的联合分布律以及 ξ 与 η 的边缘分布律为

ξ \ η	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\left(1-p\right)^2$	$2p\left(1-p\right)$	$1-p^2$
1	0	p^2	p^2
$p_{\cdot j}$	$\left(1-p\right)^2$	$1-\left(1-p\right)^2$	

由于 $0<p<1$，所以 $P\left\{\xi=1,\quad\eta=0\right\}=0\neq p^2\left(1-p\right)^2=P\left\{\xi=1\right\}P\left\{\eta=0\right\}$。

因此 ξ 与 η 不相互独立。

B3.5 解析：在随机变量相互独立的情况下，可由边缘概率密度求联合概率密度，再利用联合概率密度计算事件发生的概率。

解：（1）随机变量 X 与 Y 相互独立，故其联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-3x-4y}，& x>0,y>0,\\ 0，& 其他。\end{cases}$$

因此 $P\{X<2,Y<1\}=P\{X<2\}P\{Y<1\}=\int_0^2 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^1 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-6})(1-\mathrm{e}^{-4})$。

（2）$P\{(X,Y)\in R\}=\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3}{4}(1-x)}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y\approx 0.8009$。

B3.6 解析：本题考查二维随机变量函数的分布函数及概率密度的求法。

解：（1）由分布函数的定义，有 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ *_1, & 0\leqslant y<1,\\ *_2, & 1\le y\leqslant 4,\\ 1, & y\geqslant 4。\end{cases}$ 其中当 $0\leqslant y<1$ 时，$*_1=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y}$；

当 $1\leqslant y<4$ 时，$*_2=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$。

因此

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

（2）$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\leqslant -\frac{1}{2},Y\leqslant 4\}=P\{X\leqslant -\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\}$

$$=P\{X\leqslant -\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\}=P\{-2\leqslant X\leqslant -\frac{1}{2}\}$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}。$$

B3.7 解析：本题考查二维随机变量的边缘分布以及随机变量函数的分布的求法。

解：（1）当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x$。当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$，即 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2}$；当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$。

即 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$；

（2）当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4}。$$

（3）$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}}=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4}$。

B3.8　解析：本题考查二维连续型随机变量中的条件分布以及条件概率密度。

解：（1）X 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y\\ 0\end{cases}=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（2）Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

$$P\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}=\frac{P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}}{P\{Y\leqslant 1\}}=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{1-2\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1}。$$

B3.9 解析：本题考查二维随机变量函数的分布。

对（A）而言，$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)+f_2(x))\mathrm{d}x=2$，故（A）不成立。

对（B）而言，$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)f_2(x))\mathrm{d}x=1$ 不一定成立，如 $f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$
故（B）不成立。

对（C）而言，$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq 1$，故（C）不成立。

对（D）而言，由于随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_Z(x)=F_1(x)F_2(x)$。因此可知 $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数。故选择（D）。

解：（D）。

B3.10　解析：利用联合分布函数与边缘分布函数关系证明随机变量独立，关键在于通过假设边缘分布函数进行求解联合分布函数。

解：X 的分布函数为 $F_1(x)=\begin{cases}0, & 当x<0时,\\ 1, & 当x\geqslant 0时。\end{cases}$ 设 Y 的分布函数为 $F_2(y)$，(X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，则当 $x<0$ 时，对任意的 y 有：

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{(X\leqslant x)\cap(Y\leqslant y)\}=P\{\Phi\}=0=F_1(x)F_2(y)。$$

当 $x\geqslant 0$ 时，对任意的 y 有：

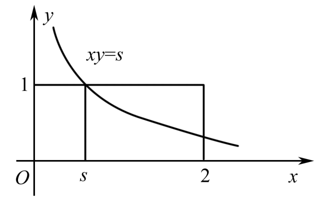
$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{(X\leqslant x)\cap(Y\leqslant y)\}=P\{Y\leqslant y\}=F_2(y)=F_1(x)F_2(y)。$$

因此对任意的 x、y 均有 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=F_1(x)F_2(y)$，即 X 与 Y 相互独立。

B3.11 解析： 已知随机变量(X,Y)的联合概率密度,可求函数$S=XY$的概率密度。常用方法是，先求出其分布函数，再通过求导得概率密度函数。在求分布函数时,一定要注意对S的取值范围进行讨论。

解： 由于二维随机变量(X,Y)服从均匀分布，所以它的概率分布密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 若(x,y)\in G,\\ 0, & 若(x,y)\notin G。\end{cases}$$



设$F(s)=P\{S\leqslant s\}$为$S=XY$的分布函数，则当$s\leqslant 0$时,$F(s)=0$；当$s\geqslant 2$时,$F(s)=1$。

现在设$0<s<2$如右图所示，曲线$xy=s$与矩形G的上边交于点$(s,1)$，位于曲线$xy=s$上方的点满足$xy>s$,位于下方的点满足$xy<s$，于是

$$F(s)=P\{S\leqslant s\}=P\{XY\leqslant s\}=1-P\{XY>s\}$$

$$=1-\iint\limits_{xy>s}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\mathrm{d}y=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)。$$

于是 $f(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2,\\ 0, & s\leqslant 0或s\geqslant 2。\end{cases}$

B3.12 解析： 本题考查二维连续型随机变量函数的分布及相关系数的计算。

解： 区域D实际是以$(-1,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$、$(0,-1)$为顶点的正方形区域，D的面积为 2，(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$；借助$f(x,y)$就可以得$f_U(u)$与$f_V(v)$。

（1）$U=X+Y$，$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X+Y\leqslant u\}=\iint\limits_{x+y\leqslant u}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

当$u<-1$时，$F_U(u)=0$；当$-1\leqslant u\leqslant 1$时，$F_U(u)=\iint\limits_{x+y\leqslant u}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{u+1}{2}$；

当$u>1$时，$F_U(u)=1$。故$f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant u\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$ $U\sim U[-1,1]$。

因为$V=X-Y$，故有$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{X-Y\leqslant v\}=\iint\limits_{x-y\leqslant v}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。当$v<-1$时，$F_V(v)=0$；当$-1\leqslant v\leqslant 1$时，$F_V(v)=\iint\limits_{x-y\leqslant v}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{v+1}{2}$；当$v>1$时，$F_V(v)=1$。故

$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leq v\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$，$V\sim U[-1,1]$。

（2）$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)$，显然$E(U)=E(V)=0$。

$$E(UV)=E\left[(X+Y)(X-Y)\right]=E(X^2-Y^2)=E(X^2)-E(Y^2)=0,$$

所以

$$\mathrm{Cov}(U,V)=0,\quad \rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=0。$$

B3.13 解析：求离散型随机变量函数的分布，首先确定随机变量函数的取值，然后求随机变量取每个值的概率，由此产生随机变量函数的分布律，通过分布律判断随机变量是否服从二项分布。

解： $P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}\cdot C_n^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}$$

$$=p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_n^{k-i}=C_{2n}^k p^k(1-p)^{2n-k},\quad k=0,1,\cdots,2n。$$

故$Z=X+Y$服从参数为$2n$、p的二项分布。

注：此处用到一个组合公式：$\sum_{i=0}^{k}C_m^iC_n^{k-i}=C_{m+n}^k$。

此公式的正确性可直观地说明如下：从$m+n$个不同的元素中取k个共有C_{m+n}^k种不同的取法。从另一个角度看，把$m+n$个元素分布两部分，一部分有m个，另一部分有n个，从第一部分中取i个再配上从第二部分中取$k-i$个，不同的取法共$C_m^iC_n^{k-i}$种，让i从0变到k，总的取法是$\sum_{i=0}^{k}C_m^iC_n^{k-i}$种，这两种取法数目应相等。

B3.14 解析：求离散型随机变量函数的分布，首先确定随机变量函数的取值，然后求取每个值的概率，由此产生随机变量函数的分布律；再利用该分布律求联合分布及判断随机变量的独立性。

解：（1）求Z的分布律。$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=2pq$。

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=p^2+q^2。$$

（2）(X,Z)的联合分布律为

X \ Z	0	1	$P\{Z=z_i\}=p_{\bullet j}$
0	pq	q^2	q
1	pq	p^2	p
$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$	$2pq$	p^2+q^2	1

（3）由上表边缘分布与联合分布的关系知，当$p=0.5$时，X与Z相互独立。

B3.15 解析：本题考查二维离散型随机变量函数的分布与协方差计算公式。

解：（1）(U,V)有三对可能值：（1，1）、（2，1）、（2，2），而

$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\dfrac{4}{9}$，

$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{4}{9}$，

$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=\dfrac{1}{9}$。

故(U,V)的联合分布律为

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）由$E(U)=\dfrac{14}{9}$，$E(V)=\dfrac{10}{9}$，$E(UV)=\dfrac{16}{9}$，则$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\dfrac{4}{81}$。

B3.16 解析：先通过随机变量的独立性求其分布函数，再通过对分布函数求导数求概率密度函数。

解：当$y>0$时，由独立性得

$$\begin{aligned}1-F_\eta(y)&=P\{\eta\geqslant y\}=P\left\{\xi_1\geqslant y,\xi_2\geqslant y,\cdots,\xi_n\geqslant y\right\}\\&=\prod_{i=1}^{n}P\left\{\xi_1\geqslant y\right\}=\prod_{i=1}^{n}\left[1-F_{\xi_i}(y)\right]\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_i y}\right)=\exp\left(-y\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)。\end{aligned}$$

故当$y>0$时，$F_\eta(y)=1-\exp\left(-y\sum\limits^{n}\lambda_i\right)$；当$y\leqslant 0$时，$F_\eta(y)=0$。求导得$\eta$的概率密度函数为当$y\leqslant 0$时，$f_\eta(y)=0$；当$y>0$时，$f_\eta(y)=F_\eta'(y)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\exp\left(-y\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\right)$。综上得

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\exp\left(-y\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\right), & y>0。\end{cases}$$

B3.17 解析：对随机变量和的分布，可用卷积公式求解，利用该公式时要注意结合图形在不同区间用不同的上、下限求积分。

解：随机变量X和Y相互独立，且X服从$[0,1]$上的均匀分布，Y服从参数为 1 的指数分布，其概率密度分别为$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\0, & y\leqslant 0\end{cases}$；$(X,Y)$的联合概率密度为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1,y>0\\0, & 其他\end{cases}$；$X$的取值范围为$[0,1]$，$Y$的取值范围为

$(0,+\infty)$，$Z=2X+Y$ 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

$Z=2X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}$。当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_Z(z)=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$D=\{(x,y)\mid 2x+y\leqslant z,0\leqslant x\leqslant 1,y>0\}$。

当 $0\leqslant z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{z}{2}}-\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{z-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{z}{2}}(1-\mathrm{e}^{2x-z})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(z+\mathrm{e}^{-z}-1\right);$$

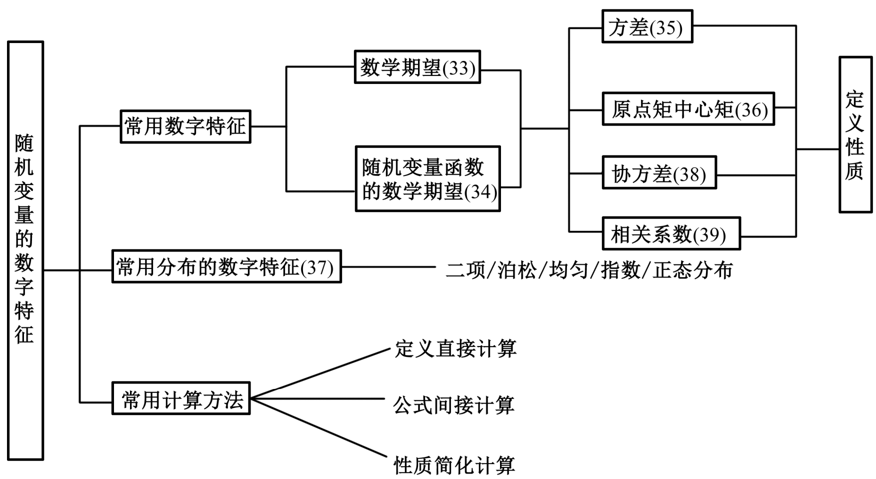
当 $z\geqslant 2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1-\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{z-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{2x-z}\right)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)\mathrm{e}^{-z},$$

故 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0\leqslant z<2,\\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 2。\end{cases}$

第 4 篇　随机变量的数字特征

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 4 篇

综　述

更多资源请扫二维码：

随机变量的数字特征是由随机变量的分布确定的，是集中反映随机变量某些特性的数值。针对有些实际问题中的随机变量，要确定其分布函数是困难的，或者是没有必要的，但可以利用统计方法确定其某些数字特征，从而帮助大家掌握该随机变量的部分信息。

数学期望与方差是随机变量的最常用、最重要的两个数字特征。数学期望(33)描述的是随机变量全体的概率加权平均值，是随机变量最重要的数字特征，所以理解数学期望的概念很重要。随机变量函数的数学期望(34)一般根据数学期望的性质即可计算出来，注意一维与二维随机变量函数的数学期望计算公式的异同点，数学期望的概念是所有数字特征的核心概念，其他数字特征都可以用数学期望来定义及计算。方差(35)描述的是随机变量相对于其数学期望的离散程度。随机变量的原点矩或中心矩(36)是最广泛的数字特征，数学期望及方差等均可看作随机变量的某种矩。针对两个随机变量，可讨论其协方差(38)及相关系数(39)，它们是描述两个随机变量相互关系的两个数字特征。在多元统计中常利用协方差矩阵讨论多个随机变量之间的关系，只不过其仅表示两个随机变量线性关系的程度，在计算上要求大家会直接套公式即可；相关系数为零的两个随机变量称为不相关，两个相互独立的随机变量一定是不相关的，两个随机变量不相关却不一定独立，对于服从二维正态分布的两个随机变量，不相关和相互独立是等价的。

计算随机变量的数字特征是本课程的一个重要题型，为了简化计算，必须记住一些常用分布的数学期望与方差(37)。

注： 文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 33　数学期望的概念及性质

更多资源请扫二维码:

33.1　概念、结论

1．概念

定义 33.1.1　数学期望　设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i\ (i=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$。设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$。

2．结论

结论 33.1.1　数学期望的性质如下：

（1）$E(c)=c$（c 为常数）；

（2）$E(kX)=kE(X)$（k 为常数）；

（3）$E(X+c)=E(X)+c$（c 为常数）；

（4）设 X 和 Y 为两个随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

（5）设 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

结论 33.1.2　随机变量的数学期望是随机变量取值的概率加权平均值，它反映随机变量取值的整体平均状况。由于随机变量 X 是一个实值函数，所以 $E(X)$ 的结果是一个实数。

结论 33.1.3　有些随机变量，由于其级数或积分达不到绝对收敛的要求，因此该随机变量的数学期望不存在，如柯西分布的数学期望不存在。柯西分布的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty\ 。$$

结论 33.1.4 随机变量的数字特征是描述随机变量分布特征的数值或数表，它们集中反映了随机变量取值在某一方面的规律特点。常见的数字特征包括数学期望、方差、各阶原点矩和中心矩、协方差和相关系数等。

33.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18
- **主要题型**：（1）求离散型随机变量的分布及数学期望；（2）通过数学期望确定参数；（3）求连续型随机变量的数学期望。
- **综述**：求离散型随机变量的数学期望，首先确定离散型随机变量的分布律，然后利用分布律套用公式计算即可。对于随机变量的概率密度或分布律中含有的未知参数，一般根据分布律或概率密度的性质，再利用数学期望的结果即可得关于该参数的方程组，从而求出参数。对于连续型随机变量的数学期望，根据其类型选择公式来计算。

33.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： **例 19.3.4**

例 33.3.1 （难度系数 0.2） 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品；从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱。求：（1）乙箱中次品数 X 的数学期望；（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率 p。

解析：（1）求离散型随机变量的分布律，需确定随机变量取值及取每个值的概率；（2）利用随机变量的分布律计算数学期望和相关事件概率。

解：（1）乙箱中次品数 X 的取值为 $0,1,2,3$，且

$$P\{X=0\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}，\ P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}，$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}，\ P\{X=3\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}。$$

即 X 的分布律为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$，因此 $E(X)=\frac{3}{2}$。

（2）设 A 表示从乙箱中任取一件产品是次品，由全概率公式，从乙箱中任取一件产品是次品的概率为

$$p=P(A)=\sum_{i=0}^{3}P\{X=i\}P(A|X=i)=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}。$$

例 33.3.2 （难度系数 0.4） 袋中装有 N 只球，但其中白球数为随机变量，只知道一次取球试验中取得白球数的数学期望为 n，试求从该袋中任取一球为白球的概率。

解析：本题考查（1）数学期望的概念及求法；（2）全概率公式。

解： X 表示袋中的白球数，X 的取值为 $1,2,\cdots,N$，则由题知

$$E(X)=\sum_{k=0}^{N}kP\{X=k\}=n。$$

设 A 表示从该袋中任取一球为白球的事件，则 $P\{A|X=k\}=\dfrac{k}{N}$，由全概率公式得：

$$P(A)=\sum_{k=0}^{N}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{N}P\{X=k\}\frac{k}{N}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kP\{X=k\}=\frac{n}{N}。$$

例 33.3.3　（难度系数 0.4）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b，x\in[0,1],\\ 0,x\notin[0,1]。\end{cases}$$

且已知 $E(X)=1$，求常数 a、b。

解析： 本题考查概率密度的性质及数学期望的计算。

解： 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+b=1$，

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1，$$

联立上述等式，解得 $a=6$，$b=-2$。

招数 33.3.1　妙招：概率密度中常用概率密度或分布律的性质确定参数，再结合题目条件给出关于参数的方程组求解。

例 33.3.4　（难度系数 0.6，跨知识点 14）　一台设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.10、0.20 和 0.30，假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。

解析： 本题的关键是对事件进行符号化，这有利于规范地计算概率。利用概率运算方法可计算随机变量取每个值的概率，由此得 X 的分布律，最后用定义计算 $E(X)$。

解： 引入事件：A_i(i=1,2,3) 表示第 i 个部件要调整，根据题设，三部件需要调整的概率分别为 $P(A_1)=0.10，P(A_2)=0.20，P(A_3)=0.30$。

由题设部件的状态相互独立，于是有

$$P\{X=0\}=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=0.9\times0.8\times0.7=0.504，$$

$$P\{X=1\}=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3$$
$$=0.398$$

$$P\{X=2\}=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\right)=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3$$
$$=0.092$$

于是 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p	0.504	0.398	0.092	0.006

从而

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=0\times 0.504+1\times 0.398+2\times 0.092+3\times 0.006\ \ =0.6\ ;$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i{}^2 p_i=0^2\times 0.504+1^2\times 0.398+2^2\times 0.092+3^2\times 0.006=0.820。$$

故 $\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.820-0.6^2=0.46$ 。

例 33.3.5（难度系数 0.8） 共有n把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁，设抽取钥匙是相互独立且等可能的；若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数X的数学期望：（1）写出X的分布律；（2）不写出X的分布律。

解析：（1）此方法是先求随机变量的分布律，再求数学期望；（2）此方法是对随机变量进行分解，一般随机试验涉及事件发生的次数，而且是求该随机变量的数字特征时，则应联想到将随机变量分解为服从 0-1 分布的随机变量和的形式。它们均是计算数学期望的常用方法。

解：（1）由题可知，X的取值为$1,2,\cdots,n$，$\{X=i\}$表示“第i次打开，而前面$i-1$次均未打开”的事件，故$P\{X=i\}=\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{n-i}{n-i+1}\dfrac{1}{n-i}=\dfrac{1}{n}$， X的分布律为

X	1	2	3	$\cdots n$
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	$\cdots\frac{1}{n}$

故$E(X)=1\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{1}{n}+\cdots+n\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{n+1}{2}$。

（2）用钥匙进行一把一把地试开，直到把钥匙用完。

设 $X_i=\begin{cases}i，第\,i\,次试开能开门\\0，第\,i\,次试开不能开门\end{cases}$； $i=1,2,\cdots,n$，则试开到能开门为止所需试开次数为$X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，其中$X_i$的分布律为

X_i	i	0
p	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

可得$E(X_i)=i\cdot\dfrac{1}{n}$,因此$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}=\dfrac{n+1}{2}$。

例 33.3.6（难度系数 0.6） 某射手有 5 发子弹，射击击中目标的命中率为 0.9，如果他击中目标就停止射击，否则一直射击到用完 5 发子弹为止。求：（1）所用子弹数X的数字期望；（2）子弹剩余数Y的数学期望。

解析：（1）只要求出X的分布律，就容易求出X的数学期望$E(X)$；（2）因为Y与X之间有线性关系：$Y=5-X$，故利用数学期望的性质即可求解。

解：（1） X的可能取值为 1，2，3，4，5，且由试验的独立性知：

$$P\{X=k\}=0.1^{k-1}\times 0.9,\ \ k=1,2,3,4$$

而

$$P\{X=5\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}-P\{X=3\}-P\{X=4\}$$
$$=1-0.9-0.09-0.009-0.0009=0.0001，$$

从而 $E(X)=\sum_{k=1}^{5}kP\{X=k\}=1\times0.9+2\times0.09+3\times0.009+4\times0.0009+5\times0.0001=1.1111$。

（2）由题意知 $Y=5-X$，故 $E(Y)=5-E(X)=5-1.1111=3.8889$。

例 33.3.7（难度系数 0.8，2009 年考研数学一真题）设随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$（　　）。

（A）0　　（B）0.3　　（C）0.7　　（D）1

解析：本题考查随机变量数字特征的计算。一般的方法是先通过对随机变量的分布函数求导求出其概率密度函数，再利用概率密度函数求其数学期望。此题不需要按部就班地求数学期望，可利用标准正态分布的数学期望为 0 以及数学期望的性质得到结果。

由于 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，故 $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'(\frac{x-1}{2})$，因此

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x[0.3\Phi'(x)+0.35\Phi'(\frac{x-1}{2})]\mathrm{d}x$$
$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(\frac{x-1}{2})\mathrm{d}x。$$

由标准正态分布的性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x=0$，令 $\frac{x-1}{2}=u$，则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(\frac{x-1}{2})\mathrm{d}x=2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)\mathrm{d}u=2，$$

所以 $E(X)=0.35\times2=0.7$，故选择（C）。

解：（C）。

知识点 34　随机变量函数的数学期望

更多资源请扫二维码:

34.1　概念、结论

1．概念

定义 34.1.1　离散型随机变量函数的数学期望　设离散随机变量 X 的分布律为

$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，无穷级数 $\sum_i g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $g(X)$ 的数学期望为 $E(g(X))=\sum_i g(x_i)p_i$。同样可定义二维随机变量函数的数学期望：设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$，则 $g(X,Y)$ 的数学期望为：

$$E(g(X,Y))=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}。$$

定义 34.1.2　连续型随机变量函数的数学期望　设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $g(X)$ 的数学期望为 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$。若二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 (X,Y) 的函数所构成的随机变量 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

2．结论

结论 34.1.1　$E\left[g_1(X)+g_2(X)\right]=E\left(g_1(X)\right)+E\left(g_2(X)\right)$。

34.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 14、18、25、26、33
- **主要题型**：（1）求随机变量函数的数学期望；（2）根据实际问题构造随机变量的函数，再求其数学期望。
- **综述**：对随机变量函数的数学期望，若函数形式确定，则直接应用公式求解；若题目给出的是实际的问题，则需根据问题背景给出某一随机变量的函数，再利用该函数来解决问题。

34.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 37.3.3，　例 40.3.2，　例 40.3.3

例 34.3.1（难度系数 0.4）　已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，求 X 的数学期望 $E(X)$。

解析：利用随机变量函数的数学期望公式进行计算。

解：依题可知，Y 的概率密度为 $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\ (-\infty<y<+\infty)$，$X=\mathrm{e}^Y$ 为 Y 的函数，则

$$E(X)=E(\mathrm{e}^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y f(y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}y$$

$$\overset{t=y-\mu}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{t+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-1)^2}{2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\text{。}$$

例 34.3.2（难度系数 0.8）　一位工人负责 n 台同样机床的维修，这 n 台机床自左至右排在一条直线上，相邻两台机床的距离为 a（米）。假设每台机床发生故障的概率均为 $\frac{1}{n}$，且相互独立，若 Z 表示工人修完一台后到另一台需要检修的机床所走的路程，求 $E(Z)$。

解析：此题的关键在于构造随机变量 X 和 Y，通过它们给出随机变量 Z 关于 X 和 Y 的表达式，再利用随机变量函数求数学期望的方法进行求解。

解：设按从左到右的顺序将机床编号为 $1, 2, \cdots, n$；X 为已经修完的机床号码，Y 表示将要去修的机床号码，则 X、Y 相互独立，且 $P\{X=i\}=\frac{1}{n}$，$P\{Y=j\}=\frac{1}{n}(i,j=1,2,\cdots,n)$，因此 $P\{X=i,\ Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}=\frac{1}{n^2}$，$Z=|X-Y|a$。

于是

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|aP\{X=i,\ Y=j\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|a\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{a}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}(i-j)+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right]=\frac{(n^2-1)}{3n}a\text{。}$$

例 34.3.3（难度系数 0.6）　设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量 $X_k=\begin{cases}0, & \text{若}Y\leqslant k,\\1, & \text{若}Y>k\text{。}\end{cases}(k=1,2)$。（1）求 $E(X_1+X_2)$；（2）求 $E(X_1X_2)$。

解析：求二维随机变量函数的数学期望，一方面可通过数学期望的性质求解；另一方面也可通过随机变量函数所构成的随机变量的分布进行求解。

解：根据已知，Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0\text{。}\end{cases}$ 则

$$X_1=\begin{cases}0, & \text{若}Y\leqslant 1,\\1, & \text{若}Y>1,\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}0, & \text{若}Y\leqslant 2,\\1, & \text{若}Y>2\text{。}\end{cases}$$

（1）由数学期望定义知：$E(X_1)=1\times P\{Y>1\}+0\times P\{Y\leqslant 1\}=P\{Y>1\}=\mathrm{e}^{-1}$。而 $E(X_2)=P\{Y>2\}=\mathrm{e}^{-2}$，因此 $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}$。

（2）由于 $X_1X_2=\begin{cases}1, & \text{若}Y>2,\\0, & \text{其他},\end{cases}$ 故

$$E(X_1X_2)=1\times P\{Y>2\}+0\times P\{Y\leqslant 2\}=P\{Y>2\}=\mathrm{e}^{-2}\text{。}$$

例 34.3.4 （难度系数 0.6）　一民航班车上共有 20 名旅客，自机场开出，有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$（设每位旅客在各车站下车是等可能的）。

解析：采用随机变量分解法，将 X 表示成数个随机变量之和 $X=\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$，然后利用数学期望的性质，通过计算 $E(X_i)$ 算出 $E(X)$。这类通过随机变量的分解能将复杂的问题化为较简单的问题是处理概率论问题常用的一种方法，这种分解法的关键是引入合适的 X_i，使得 $X=\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$。

解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0, \text{在第}i\text{站无人下车,}\\ 1, \text{在第}i\text{站有人下车,}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,10\text{。}$$

易见 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$。

按题意，任一旅客在第 i 站不下车的概率是 $\dfrac{9}{10}$，因此，20 位旅客都不在第 i 站下车的概率为 $\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$，从而在第 i 站有人下车的概率为 $1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$，因此 X_i 的分布律为

X_i	0	1
p	$\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$	$1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$

于是　$E(X_i)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$，$i=1,2,\cdots,10$，故

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784\text{。}$$

说明平均停车的次数为 8.784 次。

例 34.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 18）　设随机变量 X 的概率密度为：

$$f\left(x\right)=\begin{cases}ax, & 0<x<2,\\ cx+b, & 2\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

已知 $E(X)=2$，$P\left(1<X<3\right)=\dfrac{3}{4}$，求：（1）常数 a，b，c；（2）$E(\mathrm{e}^X)$。

解析：为了确定三个常数 a、b、c，需要三个方程，由题设可以得到两个已知条件、两个方程，另一个条件为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，而求 $E(\mathrm{e}^X)$ 只需利用随机变量函数的数学期望计算公式即可。

解：（1）由概率密度的性质可得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b\text{。}$$

又根据已知条件可得

$$2=E(X)=\int_0^2 ax^2\mathrm{d}x+\int_2^4 x(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b，$$

及

$$\frac{3}{4}=P\left(1<X<3\right)=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b。$$

联立方程组 $\begin{cases}2a+6c+2b=1\\ \dfrac{8}{3}a+\dfrac{56}{3}c+6b=2\\ \dfrac{3}{2}a+\dfrac{5}{2}c+b=\dfrac{3}{4}\end{cases}$，解得 $a=\dfrac{1}{4}，b=1，c=-\dfrac{1}{4}$。

（2）$E(\mathrm{e}^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{x}{4}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^4-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4}$。

例 34.3.6（难度系数 0.6）　设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上的均匀分布，而经销商店进货量为区间 $[10,30]$ 中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元。若供大于求，则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可以从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最少进货量。

解析：首先应给出两个随机变量 X（需求量）与 Y（利润）之间的关系，再利用随机变量函数的数学期望公式代入求解。

解：X 服从闭区间 $[10,30]$ 上的均匀分布，则概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10\leqslant x\leqslant 30,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

设进货量为 a 单位，Y 为利润，则

当 $10\leqslant X\leqslant a$ 时，利润 $Y=500X-100(a-X)=600X-100a$；

当 $a<X\leqslant 30$ 时，利润 $Y=500a+300(X-a)=300X+200a$。

故

$$Y=g(X)=\begin{cases}600X-100a，10\leqslant X\leqslant a,\\ 300X+200a，a<X\leqslant 30。\end{cases}$$

利润的数学期望值为

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int_{10}^{30}g(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{20}[\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\int_a^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x]\\&=\frac{1}{20}[7000a-150a^2+105000]\end{aligned}$$

令 $E(Y)\geqslant 9280$，解得 $a=21$，故最少进货量为 21 单位。

例 34.3.7 （难度系数 0.8，跨知识点 22，2014 年考研数学一真题） 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$，$i=1,2$。求：（1）Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（2）$E(Y)$。

解析： 知识点：条件概率公式，全概率公式，随机变量函数的分布函数的求法，数学期望的计算。

解：（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则根据全概率公式得

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}。$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{y}{1-0}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{y}{2-0}=\dfrac{1}{2}(y+\dfrac{y}{2})=\dfrac{3y}{4}$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-0}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{y}{2-0}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{2})$；

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$。

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{2}), & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2。\end{cases}$$

（2）对 Y 的分布函数求导得 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\frac{3}{4}\mathrm{d}y+\int_1^2 y\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}。$$

知识点 35　方差的概念及性质

更多资源请扫二维码:

35.1　概念、结论

1．概念

定义 35.1.1 方差　设 X 是一个随机变量，若 $E[(X-E(X))^2]$ 存在，则称它为随机变量 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即 $D(X)=E[(X-E(X))]^2$；称 $\sqrt{D(X)} \triangleq \sigma(X)$ 为标准差。

2．结论

结论 35.1.1　方差的性质如下：

（1）$D(c)=0$（c 为常数）；

（2）$D(kX)=k^2D(X)$，$D(aX+b)=a^2D(X)$（k、a、b 均为常数）；

（3）对于任意的随机变量 X 与 Y，则有

$$D(X \pm Y)=D(X)+D(Y) \pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]。$$

特别地，若 X 与 Y 相互独立，则 $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$。

结论 35.1.2　方差一般可通过以下的方法计算：

（1）$D(X)=E(X^2)-[(E(X)]^2$；

（2）$$D(X)=E[(X-E(X))^2]=\begin{cases}\sum\limits_i (x_i-E(X))^2 p_i, & \text{当}X\text{为离散型时，}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x, & \text{当}X\text{为连续型时。}\end{cases}$$

结论 35.1.3　根据方差的定义显然有 $D(X) \geqslant 0$，因此可定义 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差（或均方差），而且随机变量的标准差、数学期望与随机变量本身有相同的计量单位。

结论 35.1.4　随机变量 X 的方差 $D(X)$ 反映了整体取值与其数学期望的偏离程度，若随机变量 X 的取值越集中，则 $D(X)$ 越小；反之，若随机变量 X 的取值越分散，则 $D(X)$ 越大。

结论 35.1.5　$D(X)=0$ 的充分必要条件是随机变量 X 以概率 1 取常数值 $E(X)$，即 $P\{X=E(X)\}=1$。

35.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18，知识点 33
- **主要题型**：（1）求一维随机变量的方差；（2）求二维随机变量的方差。
- **综述**：为了求一维随机变量的方差，可先求随机变量的概率密度或分布律，再应用公式计算方差，也可以将随机变量作为另一简单随机变量的函数，先求简单随机变量的方差，再用方差的性质计算。对二维随机变量的方差同样可用二维联合概率密度或联合分布律按公式计算，也可以根据方差的性质或按结论 35.2.1 中的公式计算。

35.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 38.3.6，　例 42.3.7

例 35.3.1（难度系数 0.4，2000 年考研数学三、四真题）　设随机变量 X 在 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，设随机变量 $Y=\begin{cases}1，X>0,\\0，X=0,\\-1，X<0,\end{cases}$ 求方差 $D(Y)$。

解析：先根据已知条件得出随机变量 X 的分布函数，再根据 Y 与 X 的关系求出 Y 的分布律，进而求出方差 $D(Y)$。

解：随机变量 X 在 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{x+1}{3}, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2。\end{cases}$

先求 Y 的分布，Y 的取值为 $1,0,-1$，且 $P\{Y=1\}=P\{X>0\}=1-F(0)=\dfrac{2}{3}$，

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0$，$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=F(0)=\dfrac{1}{3}$。

所以 Y 的分布律为 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$，因此 $E(Y)=\dfrac{1}{3}$，$E(Y^2)=1$，故 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{8}{9}$。

例 35.3.2（难度系数 0.6，跨知识点 21）　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从均值为 1、标准差为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布，试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数。

解析：相互独立正态分布的线性组合仍为正态分布，且正态分布完全由其数学期望和方差决定。由于 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布，所以其函数 Z 作为 X、Y 的线性组合也服从正态分布，故只需求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$，则 Z 的概率密度函数就唯一确定了。

解：由题设知，$X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$。从而由其数学期望和方差的性质得：

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5，\quad D(Z)=2^2D(X)+D(Y)=9。$$

又因为 Z 是 X、Y 的线性函数，且 X、Y 是相互独立且均服从正态分布，故 Z 作为其线性组合也服从正态分布，故知 $Z \sim N(5,9)$，于是 Z 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{2\times 9}}，-\infty<z<+\infty。$$

例 35.3.3（难度系数 0.6，1998 年考研数学一真题）　设 X、Y 独立且都服从 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，求 $|X-Y|$ 的期望与方差。

解析： 本题考查随机变量函数的数学期望与方差的计算，注意绝对值函数的积分方法。以及标准正态分布函数的特点。

解： 独立正态变量 X、Y 的线性函数 $Z=X-Y$ 服从正态分布，又

$E(Z)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0$，$D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=1$，

故 $Z\sim N(0,1)$，且 $E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2，$$

$$E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=1，故 D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}。$$

例 35.3.4（难度系数 1.0，跨知识点 5，15）　某人用 n 把钥匙去开门，其中只有一把能打开门上的锁，今逐个任取一把试开，求打开此门所需开门次数 X 的均值及方差，假设：（1）打不开的钥匙不放回；（2）打不开的钥匙仍放回。

解析： 本题没有直接给出 X 的分布律，因而必须先根据题意求出 X 的分布律，再利用数学期望的定义进行计算。对于第二种情况，首先必须正确给出随机变量的所有取值，其次求随机变量取每个值的概率，过程中必须清楚该事件的含义再计算概率。

解：（1）在打不开的钥匙不放回的情况下，所需开门的次数 X 的可能取值为 $1,2,\cdots,n$；注意到 $X=i$ 意味着从第 1 次到第 $i-1$ 次均未能打开门，第 i 次才打开，故由古典概型计算知 $P\{X=i\}=\frac{P_{n-1}^{\ i-1}}{P_n^{\ i}}=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$；从而 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}iP\{X=i\}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}i=\frac{n+1}{2}$。又

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}i^2P(X=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)，$$

故　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(n^2-1)$。

（2）在试开不成功，钥匙仍放回的情况下，所需开门的次数 X 的可能取值为 $1,2,\cdots,n,$ 其分布律为：

$$P\{X=i\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}，i=1,2,\cdots$$

即 X 服从几何分布，故由几何分布的数学期望及方差公式可知：

$$E(X)=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n\text{，}\quad D(X)=\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=n(n-1)\text{。}$$

例 35.3.5（难度系数 0.8，跨知识点 25，2002 年考研数学三真题） 设随机变量U在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，令随机变量 $X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1;\end{cases}$ $Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1,\\ 1, & U>1。\end{cases}$ 试求：（1）X和Y的联合概率分布；（2）$D(X+Y)$。

解析：本题考查随机变量函数的分布及方差的计算。对这种连续型与离散型随机变量相结合的题型，必须清楚离散型随机变量取值的定义，由该定义转化为连续型随机变量所讨论的问题进行计算。

解：（1）二维随机变量(X,Y)有四个可能取值：$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$。

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=0$，

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}$。

于是得X和Y的联合分布律为

$$(X,Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1)\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\text{。}$$

（2）根据(X,Y)的联合分布律易知，$X+Y$和$(X+Y)^2$的分布律分别为

$$X+Y\sim\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\text{，}\quad (X+Y)^2\sim\begin{bmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\text{。}$$

由此可见$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0$，$D(X+Y)=E(X+Y)^2=2$。

例 35.3.6（难度系数 0.6，2014 年考研数学一真题） 设连续性随机变量X_1与X_2相互独立，且方差均存在，X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则（ ）。

（A）$E(Y_1)>E(Y_2)$，$D(Y_1)>D(Y_2)$　　（B）$E(Y_1)=E(Y_2)$，$D(Y_1)=D(Y_2)$

（C）$E(Y_1)=E(Y_2)$，$D(Y_1)<D(Y_2)$　　（D）$E(Y_1)=E(Y_2)$，$D(Y_1)>D(Y_2)$

解析：本题考查随机变量的数字特征的理解及计算。特殊值法是利用相对简单的随机变量或函数作为特殊情况代入所讨论的问题进行判断，仅适用于选择题的判别。

用特殊值法，不妨设$X_1,X_2\sim N(0,1)$，且X_1、X_2相互独立，则

$$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\text{。}$$

可见$Y_1\sim N(0,1)$，且$E(Y_1)=0$，$\mathrm{D}(Y_1)=1$。

由于 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$，所以

$$E(Y_2) = \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_2)) = 0, \quad D(Y_2) = \frac{1}{4}(D(X_1) + D(X_2)) = \frac{1}{2};$$

所以

$$E(Y_1) = E(Y_2) = 0, \quad D(Y_1) = 1 > D(Y_2) = \frac{1}{2}。$$

故选择（D）。

解：（D）。

知识点 36　随机变量的矩

更多资源请扫二维码:

36.1　概念、结论

1．概念

定义 36.1.1 随机变量的矩　设 X 和 Y 为随机变量，若 $E(X^k)$，$k = 1,2,\cdots$ 存在，则称它为随机变量 X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩；若 $E\left\{[X - E(X)]^k\right\}$，$k = 2,3,\cdots$ 存在，则称它为随机变量 X 的 k 阶中心矩；若 $E(X^k Y^l)$，$k,l = 1,2,\cdots$ 存在，则称它为随机变量 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩；若 $E\left\{\left[X - E(X)\right]^k \left[Y - E(Y)\right]^l\right\}$，$k,l = 1,2,\cdots$ 存在，则称它为随机变量 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。

2．结论

结论 36.1.1　随机变量的数学期望 $E(X)$ 是一阶原点矩，随机变量的方差 $D(X)$ 是二阶中心矩，协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是随机变量 X 和 Y 的二阶混合中心矩。

结论 36.1.2　各种矩实际上是随机变量的函数的数学期望，因此可利用随机变量函数的计算法求之，如

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i \quad, & \text{当}X\text{为离散型时}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x, & \text{当}X\text{为连续型时}。 \end{cases}$$

36.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18，知识点 33
- **主要题型**：二阶原点矩的计算。
- **综述**：二阶原点矩的计算常用两种方法：（1）公式法，$E(X^2)=D(X)+[(E(X)]^2$；（2）定义法，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$ 或 $E\left(X^2\right)=\sum\limits_k x_k^2p_k$。

36.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 40.3.4

例 36.3.1（难度系数 0.2） 设随机变量 X_1、X_2、X_3 相互独立，且均服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Y=\frac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right)$，则 $E\left(Y^2\right)$ 为（ ）。

（A） $\frac{1}{3}\lambda$ （B） λ^2 （C） $\frac{1}{3}\lambda+\lambda^2$ （D） $\frac{1}{3}\lambda^2+\lambda$

解析：泊松分布是常见的离散型分布，对此类随机变量或其函数的二阶矩常利用其已知的数字特征通过公式作间接计算。

解：由于 X_1、X_2、X_3 相互独立，且均服从 $P(\lambda)$ 分布，则 $(X_1+X_2+X_3)\sim P(3\lambda)$，且 $E(X_1+X_2+X_3)=D(X_1+X_2+X_3)=3\lambda$，$E(Y)=\lambda$。

再由 $Y=\frac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right)$，则

$$D(Y)=\frac{1}{9}D\left(X_1+X_2+X_3\right)=\frac{\lambda}{3}=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(Y^2)-\lambda^2,$$

解得 $E\left(Y^2\right)=\lambda^2+\frac{\lambda}{3}$，故选择（C）。

例 36.3.2（难度系数 0.4） 设 X 服从泊松分布，且 $E(X^2)=6$，则 $P\{X>1\}=$______。

解析：先据泊松分布的数字特征和已知条件确定参数 λ，从而可求事件发生的概率。

解：由 $X\sim P(\lambda)$，则由条件知 $6=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$，解得 $\lambda=2$；所以有 $P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}=1-3\mathrm{e}^{-2}$。

例 36.3.3（难度系数 0.4） 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，求 $E\left(X^2\right)$。

解析：对于非常见分布但已知概率密度的随机变量，其二阶矩常利用二阶矩定义进行计算。

解： $E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=2\left[-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\right]=2\text{。}$$

例 36.3.4（难度系数 0.4）　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，现对 X 进行四次独立重复观察，用 Y 表示观察值不大于 0.5 的次数，求 $E\left(Y^2\right)$。

解析：本题须先理顺两个随机变量 X 与 Y 的关系，求出 Y 的分布律中的参数，再利用常见随机变量的数字特征求相应随机变量的二阶矩。

解：依题 $Y\sim b(4,\ p)$，其中 $p=P(X\leqslant 0.5)=\int_0^{0.5}2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，由二项分布的数学期望公式可得

$$E(Y)=4\times\frac{1}{4}=1,\quad D(Y)=4\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\text{，故 }E\left(Y^2\right)=D(Y)+\left[E(Y)\right]^2=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}\text{。}$$

例 36.3.5（难度系数 0.6，跨知识点 18，37；2002 年考研数学一真题）　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$ 对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望。

解析：类似例 36.3.4。

解：令 $Y_i=\begin{cases}1, & X>\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & X\leqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，$(i=1,2,3,4)$，则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{4}Y_i\sim b(4,p)$，

因为 $P\left\{X\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，所以 $p=P\left\{X>\dfrac{\pi}{3}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right\}=\dfrac{1}{2}$，由二项分布的数学期望公式可得

$$E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2\text{，}\quad D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2\text{。}$$

从而

$$E(Y^2)=D(Y)+\left[E(Y)\right]^2=1+2^2=5\text{。}$$

知识点 37　常见概率分布的数学期望与方差

更多资源请扫二维码:

37.1　结论

常见随机变量的数学期望与方差如下：

分布名称	符号	均值	方差
0-1 分布	$B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$b(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	$H(n,M,N)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}(1-\frac{M}{N})(\frac{N-n}{N-1})$
均匀分布	$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
χ^2 分布 $(n\geqslant 1)$	$\chi^2(n)$	n	$2n$
t 分布	$t(n)$	0	$\frac{n}{n-2}$，$n>2$
F 分布	$F(n_1,n_2)$	$\frac{n_2}{n_2-2}$ $(n_2>2)$	$\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ $n_2>4$

注：表中最后三个分布：χ^2 分布、t 分布与 F 分布为数理统计中统计量的三大分布，详情请见知识点 45。

37.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 33，知识点 35
- **主要题型**：（1）已知常见的随机变量数字特征，确定其分布中的参数；（2）求常见随机变量函数的数字特征。
- **综述**：已知常见随机变量的数字特征，若要确定其分布中的未知参数，一般根据随机变量的概率密度或分布律的性质，再利用数字特征的计算产生关于该参数的方程组，最后通过方程组的求解得到所求参数。常见随机变量函数的数字特征可利用数字特

征的性质或计算公式求解。

37.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 36.3.2，　例 36.3.4，　例 36.3.5

例 37.3.1（难度系数 0.2）　设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，已知 $E\{(X-3)(X-2)\}=2$，则 $\lambda=$______。

解析：泊松分布是常见的离散型分布，其数字特征要牢记，本题借助数学期望的性质可计算相关参数。

解：因为 X 服从参数为 λ 的泊松分布，所以

$$E(X)=\lambda，D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda，$$

因此 $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$，

$$E\left[(X-3)(X-2)\right]=E(X^2-5X+6)=\lambda^2+\lambda-5\lambda+6=2。$$

即 $\lambda^2-4\lambda+4=0$，解得 $\lambda=2$。

例 37.3.2（难度系数 0.4）　已知随机变量 $X\sim b(n,p)$，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，求二项分布的参数 n、p。

解析：利用二项分布的数字特征，根据条件写出参数方程组。求解方程组得参数值。

解：由于 $X\sim b(n,p)$，所以 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$。由条件得方程组 $\begin{cases}np=2.4\\np(1-p)=1.44\end{cases}$，解得 $n=6，p=0.4$。

例 37.3.3（难度系数 0.8，跨知识点 33）　设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，其概率密度函数为，$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$；求随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望和方差。

解析：本题可以先求出 Z 的概率密度函数，再求 Z 的数学期望与方差，但由于求 Z 的概率密度相对较难，故这里借助随机变量函数的期望公式来求解。本题的难点在于积分公式较多。

解：由于 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，所以

$$E(Z)=E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$E(Z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\cdot rdr=\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi\left[-r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\right]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{\pi}{2}}。$$

且

$$E(Z^2)=E\left(X^2+Y^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+y^2\right)e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r^2\ =2,$$

故 $D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)^2]=2-\dfrac{\pi}{2}$。

例 37.3.4（难度系数 0.6，2000 年考研数学一真题）　某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修；设开机后第一次停机时已生产的产品个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。

解析：本题考查几何分布的数学期望和方差的计算。

解：依题意，记 $q=1-p$，则 X 的分布律为 $P\{X=i\}=q^{i-1}p,\ \ (i=1,2,\cdots)$。$X$ 的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'=P(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}。$$

因为 $E(X^2)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=p[q(\sum\limits_{i=1}^{\infty}q^i)']'=p[\dfrac{q}{(1-q)^2}]'=\dfrac{2-p}{p^2}$，所以 X 的方差为：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{P^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}。$$

例 37.3.5（难度系数 0.6，1992 年考研数学一真题）　设 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，求 $E\left(X+e^{-2X}\right)$。

解析：本题考查常见随机变量的概率密度（或分布律）以及它们的数字特征，同时考查随机变量函数的数学期望的求法。

解：由题设知，X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，且 $E(X)=1$，又因为 $E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，从而

$$E\left(X+e^{-2X}\right)=E(X)+E(e^{-2X})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}。$$

例 37.3.6（难度系数 0.4，2008 年考研数学一、三、四真题）　设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，求 $P\{X=E(X^2)\}$。

解析：本题考查泊松分布的数字特征及相关概率计算。

解：由于 $X\sim P\left(1\right)$，则 $E(X)=D(X)=1$，$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2$。因此 $P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=e^{-1}\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2e}$。

知识点 38　协方差的概念及性质

更多资源请扫二维码:

38.1　概念、结论

1．概念

定义 38.1.1　协方差　量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$。

定义 38.1.2　协方差矩阵　设随机变量 (X_1,X_2) 的四个二阶中心矩分别记为：$c_{11}=E[X_1-E(X_1)]^2$，$c_{12}=E\{[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]\}=c_{21}$，$c_{22}=E[X_2-E(X_2)]^2$；则称矩阵 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 为随机变量 (X_1,X_2) 的协方差矩阵。

2．结论

结论 38.1.1　协方差的性质如下：

（1）$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；

（2）$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$；

（3）$\mathrm{Cov}(X+k,Y+h)=\mathrm{Cov}(X,Y)$（$k$，$h$ 为常数）；

（4）$\mathrm{Cov}(X,Y+Z)=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（5）$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$；

（6）$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$。

结论 38.1.2　协方差的计算方法

（1）用公式计算：$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$；

（2）据随机变量的函数的数学期望的求法，用定义计算

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}。$$

结论 38.1.3　设 $D(X)\neq 0$，$D(Y)\neq 0$，则可证明下列命题等价：

（1）X 与 Y 不相关；

（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

（3）$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$；

（4）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

结论 38.1.4 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$。反之，不成立；

结论 38.1.5 协方差矩阵反映了两个随机变量之间的相互关系。

38.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：4
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18，知识点 33
- **主要题型**：（1）求二维离散型或连续型随机变量的协方差；（2）求两个随机变量函数的协方差。
- **综述**：二维离散型或连续型随机变量的协方差，一般直接应用公式求解；对两个随机变量函数的协方差，一般先求随机变量函数的分布，再求协方差。

38.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： **例 39.3.1，例 39.3.5**

例 38.3.1（难度系数 0.2） 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y$，$V=X+Y$，则随机变量 U 和 V 必然（ ）。

（A）不独立 （B）独立 （C）相关系数不为零 （D）相关系数为零

解析： 本题考查协方差与相关系数的相关概念及计算方法。

因为随机变量 X 和 Y 独立同分布，则 $D(X)=D(Y)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=E(UV)-E(U)E(V)=E(X^2-Y^2)-E(X+Y)E(X-Y)\\&=E(X^2)-E(Y^2)-\left[E(X)\right]^2+[E(Y)]^2=D(X)-D(Y)=0,\end{aligned}$$

所以随机变量 U 和 V 的相关系数为零，故选择（D）。

解：（D）。

例 38.3.2（难度系数 0.6） 箱内有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从中随机地取出 2 个球，记 X 为取到的红球数，Y 为取到的白球数。（1）求随机变量 (X,Y) 的联合分布律；（2）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解析： 本题考查（1）二维离散随机变量的联合分布律；（2）随机变量数字特征的计算。

解：（1）X 的可能值为 $0,1$；Y 的可能值为 $0,1,2$。

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5},\quad P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},\quad P\{X=1,Y=2\}=0,$$

故 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

（2）根据离散型随机变量函数的分布律的求法，得

$$X\text{ 的分布律为}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}，\ E(X)=\frac{1}{3}；$$

$$Y\text{ 的分布律为}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}，\ E(Y)=\frac{2}{3}；$$

$$XY\text{ 的分布律为}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{13}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}，\ E(XY)=\frac{2}{15}；$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{4}{45}。$$

例 38.3.3（难度系数 1.0，跨知识点 22）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}，& x\in(-1,0), \\ \frac{1}{4}，& x\in[0,2), \\ 0，& x\notin(-1,2)。\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求：（1）Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（2）$\operatorname{Cov}(X,Y)$；（3）$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$。

解析：本题考查（1）随机变量函数的分布；（2）二维连续型随机变量的协方差等相关计算；（3）分布函数及概率的计算。

解：（1）根据已知，X 的取值范围为 $(-1,2)$，则 $Y=X^2$ 的取值范围为 $[0,4)$，其分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$。

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<4$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$。根据 X 的概率密度，又可以分为以下两种情况：

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{y}}{4}$；

当 $1\leqslant y<4$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4}$，

因此，分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3\sqrt{y}}{4}, & 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{y}}{4}, & 1\leqslant y<4\\ 1, & y\geqslant 4\end{cases}$，故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

（2）由于 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$，

且

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$E(Y)=E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{5}{6},$$

$$E(XY)=E\left(X^3\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{7}{8},$$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\dfrac{2}{3}$。

（3）$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$

$$=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=P\left\{-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}。$$

例 38.3.4（难度系数 0.8，2000 年考研数学三、四真题） 设 A、B 是两随机事件，随机变量 $X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{出现}\\ -1, & \text{若}A\text{不出现}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{出现}\\ -1, & \text{若}B\text{不出现}\end{cases}$，试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 独立。

解析： 本题考查协方差的计算及事件独立性的相关概念。先计算出 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，再证明 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 当且仅当 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$。

解： 记 $P(A)=p_1$，$P(B)=p_2$，$P(AB)=p_{12}$，则 X,Y 的分布律分别为

X	-1	1
P	$1-P(A)$	$P(A)$

，

Y	-1	1
P	$1-P(B)$	$P(B)$

可见
$$E(X)=P(A)-\left[1-P(A)\right]=2P(A)-1=2p_1-1,$$
$$E(Y)=P(B)-\left[1-P(B)\right]=2P(B)-1=2p_2-1。$$
再求 $E(XY)$，由于 XY 只有两个可能值 1 和 -1，故
$$P(XY=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=-1)=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=p_{12}+P(\overline{A\cup B})$$
$$=p_{12}+1-P(A\cup B)=p_{12}+1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=2p_{12}-p_1-p_2+1,$$
$P(XY=-1)=1-P(XY=1)=p_1+p_2-2p_{12}$，从而
$$E(XY)=P(XY=1)-P(XY=-1)=4p_{12}-2p_1-2p_2+1,$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=4p_{12}-4p_1\cdot p_2。$$
因此 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 当且仅当 $p_{12}=p_1\cdot p_2$，即 X 与 Y 不相关当且仅当 A 与 B 相互独立。

例 38.3.5（难度系数 0.8，2004 年考研数学一真题） 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$，令 $Y=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则（ ）。

（A） $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$ （B） $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

（C） $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$ （D） $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

解析：本题考查（1）协方差的性质及计算；（2）随机变量相互独立与协方差的关系。

注意：由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 相互独立，所以有 $\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_i\right)=0(i\neq 1)$。

由题设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 相互独立同分布，因此
$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$$
且 $D(X_1)=\sigma^2>0$，所以
$$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_i\right)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)=\frac{1}{n}\sigma^2，$$故选择（A）。

解：（A）。

例 38.3.6（难度系数 0.6，跨知识点 35，2005 年考研数学一、三、四真题） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$。求：（1） $D(Y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$；（2） $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$。

解析：本题考查方差与协方差的计算。对多个随机变量所构成的函数计算其数字特征，关键在于利用随机变量之间的关系（如相互独立），再结合数字特征的性质进行计算。

解：（1） 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为总体 $N(0,1)$ 的一组样本，则 $D(X_i)=1$，$i=1,2,\cdots,n$。

$$D(Y_i)=D\left(X_i-\overline{X}\right)=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}X_k\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}D(X_k)=\frac{(1-n)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}(i=1,2,\cdots,n)\text{。}$$

（2）由已知条件知，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$X_i\sim N(0,1)$，则$E(\overline{X})=0$，$D(\overline{X})=E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}$；故

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E\left[Y_1-E(Y_1)\right]E\left[Y_n-E(Y_n)\right]=E\left(X_1-\overline{X}\right)\left(X_n-\overline{X}\right)$$

$$=E\left(X_1X_n\right)+E\left(\overline{X}^2\right)-E\left(X_1\overline{X}\right)-E\left(X_n\overline{X}\right)$$

$$=E\left(X_1\right)E\left(X_n\right)+D\left(\overline{X}\right)-\frac{1}{n}\left[E\left(X_1^2\right)+\sum_{k=2}^{n}E\left(X_1X_k\right)+E\left(X_n^2\right)+\sum_{k=1}^{n-1}E\left(X_kX_n\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{n}\text{。}$$

例 38.3.7（难度系数 0.6，2007 年考研数学四真题） 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，求：（1）(U,V)的联合分布律；（2）$\mathrm{Cov}(U,V)$。

解析：本题考查（1）二维离散型随机变量函数的分布；（2）协方差的计算。

解：（1）(U,V)可能的取值有三对：$(1,1)$，$(2,1)$，$(2,2)$，而

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{4}{9},$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{4}{9},$$

$$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}\cdot P\{Y=2\}=\frac{1}{9}\text{。}$$

故(U,V)的联合分布律为

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）根据(U,V)的联合分布律，$E(U)=\frac{14}{9}$，$E(V)=\frac{10}{9}$，$E(UV)=\frac{16}{9}$，所以

$$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)\cdot E(V)=\frac{4}{81}。$$

招数 38.3.1　无招胜有招：在概念清楚的基础上，将一个大问题化为多个小问题是分析中的常规思路。

知识点 39　相关系数的概念及性质

更多资源请扫二维码:

39.1　概念、结论

1．概念

定义 39.1.1 相关系数　设 $D(X)\neq 0$，$D(Y)\neq 0$，随机变量 X 与 Y 的相关系数定义为 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$。

定义 39.1.2 随机变量 X 与 Y 不相关　若相关系数 $\rho_{XY}=0$，则称随机变量 X 与 Y 不相关。

注：随机变量 X 与 Y 不相关也等价于 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$。

2．结论

结论 39.1.1　相关系数是一个无量纲的量，反映了两个随机变量 X 与 Y 之间线性相关的程度，其绝对值越大则线性相关的程度越大。

结论 39.1.2　相关系数的性质

（1）$|\rho_{XY}|\leqslant 1$；

（2）$|\rho_{XY}|=1$，等价于存在常数 a、b，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$。

特别地，若 $Y=aX+b$，则当 $a>0$ 时，$\rho_{XY}=1$，称 X 与 Y 为正相关；当 $a<0$ 时，$\rho_{XY}=-1$，称 X 与 Y 为负相关。

结论 39.1.3　若随机变量 X 与 Y 独立，则随机变量 X 与 Y 不相关；其逆命题不成立，即随机变量 X 与 Y 不相关，则随机变量 X 与 Y 不一定独立。

结论 39.1.4　若随机变量 X 与 Y 的联合分布是二维正态分布，则 X 与 Y 独立的充要条件是 X 与 Y 不相关；若随机变量 X 与 Y 都服从 0-1 分布，则 X 与 Y 独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关。

结论 39.1.5　下列命题等价：

（1） X 与 Y 不相关即 $\rho_{XY}=0$；
（2） $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；
（3） $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$；
（4） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

39.2 知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 33，知识点 35，知识点 38
- **主要题型：**相关系数的含义及计算。
- **综述：**要理解相关系数的含义，随机变量 X 与 Y 的相关系数反映的是两个随机变量之间线性相关的程度，注意随机变量不相关与相互独立的区别，要弄清楚二维正态分布的随机变量不相关与独立是等价的；相关系数可直接应用公式分步计算。

39.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 42.3.4

例 39.3.1 （难度系数 0.2） 设随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证： X 和 Y 不相关，但 X 和 Y 不是相互独立的。

解析：本题考查随机变量相关性和独立性的判断，注意两者判断的依据。

解：根据联合分布律知 $P\{X=1\}=\dfrac{3}{8}$，$P\{Y=1\}=\dfrac{3}{8}$，$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{8}$，则

$$P\{X=1,Y=1\}\neq P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

故 X 和 Y 不是相互独立的。

易知 $E(X)=E(Y)=1\times\dfrac{3}{8}+0\times\dfrac{2}{8}+(-1)\times\dfrac{3}{8}=0$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{3}{4}>0$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=E(XY)\\&=1\times1\times\frac{1}{8}+(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times1\times\frac{2}{8}+0=0\text{。}\end{aligned}$$

得到 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$，即 X 和 Y 不相关。

例 39.3.2（难度系数 0.4）　设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　）。

（A）　$P\{Y=-2X-1\}=1$　　　　（B）　$P\{Y=2X-1\}=1$

（C）　$P\{Y=-2X+1\}=1$　　　　（D）　$P\{Y=2X+1\}=1$

解析：本题考查大家对相关系数含义的理解。

由 $\rho_{XY}=1$，说明 X 和 Y 是正相关，故（A）、（C）错误；又由 $Y=2X-1$，可得 $E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=-1$，与 $E(Y)=1$ 矛盾，（B）错误；X 和 Y 是正相关，且 $Y=2X+1$，故选择（D）。

解：（D）。

例 39.3.3（难度系数 0.6）　设随机变量 (X,Y) 服从正态分布，且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$。

解析：本题考查二维随机变量相关系数及方差等数字特征的计算，运算的关键在于利用性质。

解：由 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，则

$$E(X)=1,\ D(X)=9,\quad E(Y)=0,\ D(Y)=16,$$

因此

$$E（Z）=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned}D(Z)&=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)。\\&=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}\times 3^2+\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{1}{3}\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}=1+4+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=3。\end{aligned}$$

例 39.3.4（难度系数 0.6，2001 年考研数学一、三真题）　将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于______。

（A）　-1　　　　（B）　0　　　　（C）　$\dfrac{1}{2}$　　　　（D）1

解析：本题考查相关系数的含义。

由题知：由于 X 表示正面向上的次数；Y 表示反面向上的次数，故有 $X+Y=n$，并且 $X \sim b(n,\dfrac{1}{2})$，$Y \sim b(n,\dfrac{1}{2})$，于是 $E(X)=E(Y)=\dfrac{n}{2}$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{n}{4}$。

因为 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=E(nX-X^2)-\dfrac{n^2}{4}=\dfrac{n^2}{2}-(\dfrac{n}{4}+\dfrac{n^2}{4})-\dfrac{n^2}{4}=-\dfrac{n}{4}$，所以

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-\dfrac{n}{4}}{\sqrt{\dfrac{n}{4}}\sqrt{\dfrac{n}{4}}}=-1$。故选择（A）。

解：（A）。

例 39.3.5（难度系数 0.8，2004 年考研数学一、三真题）　设 A、B 为随机事件，且

$$P(A)=\frac{1}{4}，\ P(B|A)=\frac{1}{3}，\ P(A|B)=\frac{1}{2}。$$

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$。计算：（1）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律；（2）X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

解析：按招数 38.3.1 处理。

解：（1）由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{12}$，$P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$，

所以　　$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\dfrac{1}{12}$，$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$，

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}，$$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\dfrac{2}{3}$。

故 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

（2）根据 (X,Y) 的联合分布律得：

$E(X)=\dfrac{1}{4},E(Y)=\dfrac{1}{6}$，$D(X)=\dfrac{3}{16}$，$D(Y)=\dfrac{5}{36}$，$E(XY)=\dfrac{1}{12}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\dfrac{1}{24}$，从而 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$。

第 4 篇综合测试题

综合测试题 A

A4.1　从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是$\frac{2}{5}$，设 X 为途中遇到红灯的次数，求 X 的分布律、分布函数、数学期望和方差。（知识点 33，难度系数 0.6）

A4.2　设某考区考生的外语成绩（百分制）X 服从正态分布，平均成绩（参数 μ 之值）为 72 分，96 分以上的人占考生总数的 2.3%，今任取 100 个考生的成绩，以 Y 表示成绩在 60～84 分的人数，求：（1）Y 的分布律；（2）$E(Y)$ 和 $D(Y)$。（知识点 33，难度系数 0.6）

A4.3　设 $X\sim U[0,1]$，$Y\sim U[0,1]$，且 X 与 Y 独立，求 $E(|X-Y|)$。（知识点 34，难度系数 0.4）

A4.4　设随机变量 X_1、X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

（1）求 $E(X_1+X_2)$、$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1、X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$。（知识点 34，难度系数 0.8）

A4.5　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。（知识点 35，难度系数 0.4）

A4.6　设随机变量 X 的均值、方差都存在，且 $D(X)\neq 0$，求 $Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 的均值与方差。（知识点 35，难度系数 0.6）

A4.7　设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y):0<x<1,|y|<x\}$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$。（知识点 35，难度系数 0.6）

A4.8　设 X 服从参数为 λ 的指数分布，且 $P\{X\geqslant 1\}=\mathrm{e}^{-2}$，则 $E(X^2)=$______。（知识点 36，难度系数 0.4）

A4.9　设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	0	1
P	p_1	p_2	p_3

且已知$E(X)=0.1$，$E(X^2)=0.9$，求p_1、p_2、p_3。（知识点 36，难度系数 0.6）

A4.10 设随机变量X服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad 0<p<1,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

求$E\left(X^2\right)$。（知识点 36，难度系数 0.2）

A4.11 已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，求$E(X)$、$D(X)$。（知识点 37，难度系数 0.4）

A4.12 设$D(X)\neq 0$，$D(Y)\neq 0$，证明下列命题等价：（1）X与Y不相关；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；（3）$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$；（4）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。（知识点 38，难度系数 0.4）

A4.13 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
−1		0.64	
0	0.04		
$P\{Y=y_j\}$		0.8	1

（1）请将上表空格处填全；（2）求X、Y的数学期望以及方差；（3）求X、Y的协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$以及相关系数ρ_{XY}，并判断X、Y是否不相关，是否独立。（知识点 38，难度系数 0.4）

A4.14 设$E(X)=3$，$E(X^2)=25$，$E(Y)=3$，$E(Y^2)=34$，$\rho_{XY}=0.5$。（1）求$D(X+Y)$、$D(X-Y)$；（2）设$Z=aX+bY$，若X、Z不相关，问a、b应满足什么条件？（知识点 38，难度系数 0.6）

A4.15 设随机变量(X,Y)的联合分布为圆域$x^2+y^2\leqslant r^2$上的均匀分布，（1）求X和Y的相关系数ρ_{XY}；（2）问X和Y是否独立？（知识点 39，难度系数 1.0，1991 年考研数学真题）

综合测试题 B

B4.1 设随机变量X、Y的相关系数为 0.5，已知$E(X)=E(Y)=0$，$E(X^2)=E(Y^2)=2$，求$E[(X+Y)^2]$。（知识点 33，难度系数 0.8，2003 年考研数学四真题）

B4.2 设随机变量X、Y不相关，且$E(X)=2$，$E(Y)=1$，$D(X)=3$，则$E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$（　　）。（知识点 33，难度系数 0.8，2015 年考研数学一真题）

（A）−3　　（B）3　　（C）−5　　（D）5

B4.3 设某楼房共有$n+1$层，r个人在一楼进入电梯，每位乘客在任何一层楼出电梯的概率相同。求电梯中的人下空时，电梯所停次数的数学期望。（知识点 34，难度系数 1.0）

B4.4　设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$ 、$(1,0)$ 、$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $U = X + Y$ 的方差。（知识点 35，难度系数 0.8，2001 年考研数学一真题）

B4.5　设 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，求 $E\left(X^2\right)$。（知识点 36，难度系数 0.8，1995 年考研数学一真题）

B4.6　某车间生产的圆盘直径在区间 (a,b) 上服从均匀分布，试求圆盘面积的数学期望。（知识点 37，难度系数 0.6）

B4.7　设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为 $P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$，$P\{X=2\}=\dfrac{1}{3}$，$U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$；（1）求 (U,V) 的联合分布律；（2）求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$。（知识点 38，难度系数 0.8）

第 4 篇综合测试题详解

综合测试题 A 详解

A4.1 解析：本题考查离散型随机变量的相关知识。先确定随机变量分布，再求取每个值的概率，由此得到分布函数。最后根据其分布给出数学期望和方差。

解： X 的分布律为 $P\{X=k\}=C_3^k(\dfrac{2}{5})^k(\dfrac{3}{5})^{3-k}$，$k=0,1,2,3$。即

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ \dfrac{27}{125}, & 0\leqslant x<1, \\ \dfrac{81}{125}, & 1\leqslant x<2, \\ \dfrac{117}{125}, & 2\leqslant x<3, \\ 1\ , & x\geqslant 3。\end{cases}$$

由二项分布的数学期望与方差公式可得

$$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}，\quad D(X)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}。$$

A4.2 解析：依题可知Y服从二项分布，其参数p可通过X的正态分布来求解，再利用二项分布求相应的数学期望和方差。

解：（1）根据已知可得$Y\sim b(100,p)$，其中

$$p=P\{60<X\leqslant 84\}=\varPhi(\frac{84-72}{\sigma})-\varPhi(\frac{60-72}{\sigma})=2\varPhi(\frac{12}{\sigma})-1。$$

由$0.023=P\{X>96\}=1-\varPhi(\frac{96-72}{\sigma})=1-\varPhi(\frac{24}{\sigma})$，得$\varPhi(\frac{24}{\sigma})=0.977$，即$\frac{24}{\sigma}=2$，$\sigma=12$。

查正态分布表得$p=2\varPhi(1)-1=0.6826$，即$Y\sim b(100,\ 0.6826)$。故Y的分布律为

$$P\{Y=k\}=C_{100}^{k}(0.6826)^{k}(0.3174)^{100-k},k=0,1,\cdots,100。$$

（2）由二项分布的数学期望与方差公式得

$$E(Y)=100\times 0.6826=68.26，\quad D(Y)=68.26\times 0.3174=21.6657。$$

A4.3 解析：求随机变量函数的数学期望，一般情况下可先求联合概率密度，再利用联合概率密度求解。注意含绝对值的积分要先去绝对值。

解：依题意，X与Y的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

因为X与Y相互独立，所以X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}E(|X-Y|)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)|x-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\int_0^x(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\int_x^1(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}。\end{aligned}$$

A4.4 解析：本题考查连续型随机变量的数学期望的解法，数学期望与独立性的关系。

解：（1）根据条件可得

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^{\infty}x\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}x\cdot 4\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$$

$$=\left[-x\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{\infty}+\left[-x\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^{\infty}x^2\cdot 4\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$$

$$=1-3\left[-x^2\mathrm{e}^{-4x}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}。$$

（2）因为 X_1、X_2 相互独立，则 $E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$。

A4.5　解析：用常规方法计算。

解：因为　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0$，

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=2,$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2$。

注：本题运用了公式 $\int_0^{+\infty}x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=n!$

A4.6 解析：本题考查随机变量函数的数学期望及方差的计算，其中计算过程 $Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 称为随机变量 X 的“中心化”。

解：$E(Y)=E[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}(E(X)-E(X))=0$。

$$D(Y)=D[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{1}{D(X)}D[X-E(X)]$$

$$=\frac{1}{D(X)}[D(X)+D(-E(X))]=\frac{D(X)}{D(X)}=1。$$

A4.7 解析：在求 X 的数学期望或方差时，可以采用两种计算方法：一是先求 X 的边缘概率密度函数，再套用公式；二是从 X 与 Y 的联合密度函数直接套用相关公式。本题采用第一种方法。

解：由方差的性质可得 $D(Z)=D(2X+1)=4D(X)$。又由于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

于是

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\ E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}。$$

因此 $D(Z)=4D(X)=4\times\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$。

A4.8　解析：先由已知条件求指数分布中的参数，再利用随机变量 X 的数学期望与方差求 X 的二阶矩。

解：设 X 服从参数为 λ 的指数分布，则其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，因此 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X<1\}=1-F(1)=\mathrm{e}^{-\lambda}$。

由条件 $P\{X \geqslant 1\} = \mathrm{e}^{-2}$，得 $1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-2}$，解得 $\lambda = 2$，所以

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}。$$

故

$$E(X^2) = D(X) + \left[E(X)\right]^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}。$$

A4.9 解析：利用随机变量的数字特征及分布律的性质给出相关等式，再通过方程组联立的形式确定其概率。

解：因为

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{4.9.1}$$

又

$$E(X) = (-1)\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 = p_3 - p_1 = 0.1 \tag{4.9.2}$$

$$E(X^2) = (-1)^2\cdot p_1 + 0^2\cdot p_2 + 1^2\cdot p_3 = p_1 + p_3 = 0.9 \tag{4.9.3}$$

所以由式（4.9.1）、式（4.9.2）、式（4.9.3）联立解得 $p_1 = 0.4$， $p_2 = 0.1$， $p_3 = 0.5$。

A4.10 解析：对于一般性随机变量，其二阶矩可通过二阶矩公式进行计算。

解：由函数的幂级数展开式 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k = \dfrac{x}{1-x}\quad (|x|<1)$ 可得

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = p\left[x\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right]'_{x=q} = p\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'_{x=q} = \frac{2-p}{p^2}。$$

A4.11 解析：通过概率密度函数判断随机变量 X 服从正态分布，再利用正态分布的数字特征写出所求随机变量的数学期望和方差。

解：因为 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$，所以 $X \sim N(1,\dfrac{1}{2})$，所以 $E(X) = 1$， $D(X) = \dfrac{1}{2}$。

A4.12 解析：本题考查随机变量数字特征的概念、性质和计算。

证明：由 $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 知命题（1）和（2）等价。由 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$ 知命题（2）和（3）等价。由 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ 知，命题（2）和（4）等价。由等价关系的对称性、传递性知，这四个命题等价。

A4.13 解析：本题考查离散型随机变量分布律和数字特征的计算以及相互关系。

解：（1）根据概率的性质可得 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
-1	0.16	0.64	0.8
0	0.04	0.16	0.2
$P\{Y=y_j\}$	0.2	0.8	1

（2） $E(X)=-0.8$， $E(Y)=0.8$， $D(X)=0.16$， $D(Y)=0.16$；

（3） $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=-0.64-(-0.8)(0.8)=0$，

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，所以 X、Y 不相关，又因为（ X,Y ）联合分布律中满足 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$， i、j 取任意值，所以 X、Y 也相互独立。

A4.14 解析：本题考查一般情况下随机变量函数的方差计算。

解：（1）由已知条件知： $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=16$， $D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=25$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0.5\times4\times5=10$， 而 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2\mathrm{Cov}(X,Y)$，故 $D(X+Y)=16+25+2\times10=61$， $D(X-Y)=16+25-2\times10=21$。

（2）由于 X、Z 不相关，即 $\rho_{XY}=0$ 等价于 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathrm{Cov}(X,aX+bY)=a\mathrm{Cov}(X,X)+b\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=aD(X)+b\mathrm{Cov}(X,Y)=16a+10b\text{。}\end{aligned}$$

所以 a、b 应满足条件 $8a+5b=0$。

A4.15 解析：（1）先计算数学期望和协方差，再求相关系数；（2）判断随机变量独立性，则需要求出它们的联合概率密度和边缘概率密度。

解：（1）由假设知，X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leqslant r^2,\\ 0, & x^2+y^2>r^2\text{。}\end{cases}$ 根据联合概率密度与边缘概率密度的关系，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\mathrm{d}y, & |x|\leqslant r\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, & |x|\leqslant r,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, & |y|\leqslant r,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

注意到 $f_X(x)$， $f_Y(y)$ 均为偶函数，因此可得

$$E(X)=\int_{-r}^{r}x\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=0,\ E(Y)=\int_{-r}^{r}y\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\mathrm{d}y=0\text{。}$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\dfrac{xy}{\pi r^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

于是 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=0$。

（2）因为根据（1）的结论，在 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上，有 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量 X 和 Y 不独立。

注：随机变量的“独立性”与“不相关”是两个不同的概念，但在二维正态随机变量中，“独立性”与“不相关”是等价的。

综合测试题 B 详解

B4.1 解析：本题考查随机变量数字特征之间的转换式。

解：由题设，可知 $\rho_{XY}=0.5$， $D(X)=D(Y)=2$，则

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0.5\times 2=1$， $E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+E(X)E(Y)=1$。

因此 $E[(X+Y)^2]=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)=6$。

B4.2 解析：本题考查随机变量的数学期望的性质及运算。

因为
$$
\begin{aligned}
E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\
&=D(X)+E^2(X)+E(X)\cdot E(Y)-2E(X)=3+2^2+2\times 1-2\times 2=5,
\end{aligned}
$$
所以选择（D）。

解：（D）。

B4.3 解析：将复杂随机变量表示为简单随机变量之和是处理概率问题的一种常用方法。

解：引入随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第i层有人下\\ 0, & 第i层无人下\end{cases}$，则电梯所停的次数 $X=X_2+\cdots+X_{n+1}$，X_i 的分布律为$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-(1-\frac{1}{n})^r & (1-\frac{1}{n})^r\end{pmatrix}$， $E(X_i)=1-(1-\dfrac{1}{n})^r$，

$$E(X)=E(X_2)+\cdots+E(X_{n+1})=n[1-(1-\frac{1}{n})^r]。$$

B4.4 解析：本题 X 与 Y 不独立，因此不能用方差的性质做，可用协方差“迂回”计算方差。

解：三角形区域为 $G=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leq 1,x+y\geqslant 1\}$，其面积为 $\dfrac{1}{2}$。随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G,\\ 0, & 若(x,y)\notin G。\end{cases}$$

以 $f_X(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时， $f_X(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，有

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x$，即 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 因此 $E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$；$E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$；$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{18}$。同理可得 $E(Y)=\dfrac{2}{3}$；$D(Y)=\dfrac{1}{18}$。

再求 X 和 Y 的协方差。因为 $E(XY)=\iint\limits_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\dfrac{5}{12}$，所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是 $D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$。

B4.5 解析：本题考查两方面内容，一是随机变量 X 的分布；二是如果直接求解太麻烦，则灵活应用方差的计算公式。

解：由题意知 $X\sim \mathrm{b}(10,0.4)$，于是 $E(X)=10\times 0.4=4$，

$$D(X)=10\times 0.4\times(1-0.4)=2.4,\quad E\left(X^2\right)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=2.4+4^2=18.4。$$

B4.6 解析：本题考查均匀分布的概率密度和数学期望的相关公式。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$ 用 Y 表示圆盘的面积，则 $Y=\dfrac{1}{4}\pi X^2$，从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4(b-a)}\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{\pi}{12}(b^2+ab+a^2)。$$

B4.7 解析：本题考查二维离散型随机变量的联合分布律和协方差的计算。

解：（1）根据已知条件知

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\quad P\{U=1,V=2\}=0,$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}。$$

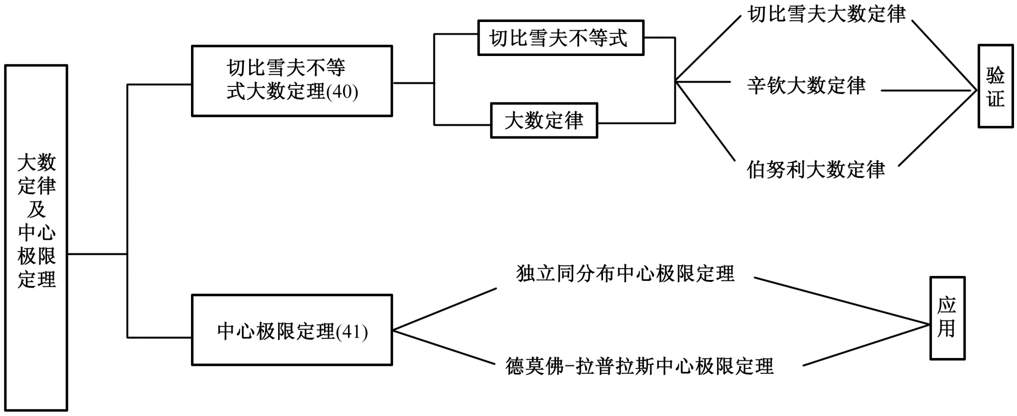
因此 (U,V) 的联合分布律为

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）U 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$，$V$ 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$，$UV$ 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$，则$E(U)=\frac{14}{9}$，$E(V)=\frac{10}{9}$，$E(UV)=\frac{16}{9}$，故协方差为$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{4}{81}$。

第 5 篇　大数定律和中心极限定理

知识网格结构及知识点关联图



第 5 篇

综　　述

更多资源请扫二维码：

概率论是通过大量在相同条件下独立重复进行的试验来研究随机现象的统计规律性的，而大量的随机试验必定会产生大量的随机变量，对于这些随机变量，若要讨论其分布，势必要设法探究这些随机变量的和的极限分布，由此产生两大类极限定理，即大数定律与中心极限定理。

本篇先介绍切比雪夫不等式[40]，它给出了在分布函数未知，但数学期望及方差已知的情况下，某些事件的概率估计式。此不等式不仅仅可用于估计概率，还可用于大数定律的推证。大数定律[40]是借助“依概率收敛”的概念讨论大量随机现象的平均值稳定性的定理，本篇给出了在三种不同条件下的大数定律：切比雪夫大数定律、辛钦大数定律和伯努利大数定律。对这些定律，重点在于清楚定理成立的条件，并借助这些条件来理解各个定律之间的联系。它们从理论上缜密地论证了频率值趋于稳定的特性，为利用频率定义概率的公理化定义提供了坚实的理论依据，由此奠定了概率论在研究数理统计问题的理论基础地位。

概率论中，在一定条件下断定大量随机变量和的极限分布趋于正态分布的定理，统称为中心极限定理，本篇给出了三个不同条件下的中心极限定理[41]，但最常用的是独立同分布的中心极限定理和德莫佛-拉普拉斯中心极限定理来计算大量随机变量所表示事件的概率，中心极限定理表明大量独立同分布（可以是任意的分布）的随机变量和的分布均可近似作为正态分布，由此解释了正态分布的常见性及其在概率论中的重要地位。

具体题型中很少涉及大数定律，而中心极限定理较常用。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 40　切比雪夫不等式及大数定律

更多资源请扫二维码:

40.1　概念、定理

1．概念

定义 40.1.1　切比雪夫不等式　设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 和方差 $D(X)=\sigma^2$ 存在，则对于任意 $\varepsilon>0$，有 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}>1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 或者 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$。

定义 40.1.2　大数定律　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立，若它满足

$$\lim_{x\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_1)\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

则称该随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

2．定理

定理 40.1.1　切比雪夫大数定律　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立，它们的数学期望和方差都存在，且方差一致有界，则对任意的正数 ε，有

$$\lim_{x\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_1)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

定理 40.1.2　辛钦大数定律（独立同分布的随机变量序列的大数定律）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 独立同分布，且具有数学期望 $E(X_i)=\mu$，$i=1,2,\cdots$，则对任意的正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$。

定理 40.1.3　伯努利大数定律　设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$。

注：伯努利大数定律表明，在大量重复试验中，事件发生的频率依概率收敛于事件

的概率，对不同的大数定律，必须注意它们适用的范围。

40.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 33，知识点 35
- **主要题型**：应用切比雪夫不等式估计事件的概率；大数定律及相关结论的证明。
- **综述**：在已知某随机变量的数学期望和方差的情况下可按切比雪夫不等式来估计事件的概率，但要注意该估计只能应用在以期望值为中心的对称区间的事件的概率中，而不是任意区间的概率；对大数定律首先要清楚大数定律的含义，其次清楚不同的条件下的大数定律，最后必须会验证随机变量序列是否服从大数定律。

40.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 50.3.5

例 40.3.1（难度系数 0.2）用切比雪夫不等式确定，掷一枚质地均匀的硬币时，需掷多少次，才能保证“正面”出现的频率在 0.4～0.6 的概率不小于 0.9。

解析：本题考查切比雪夫不等式的应用，应用此不等式时需要先计算出数学期望和方差，其结果是 n 的估计值。

解：设需掷 n 次，且正面出现的次数为 Y_n，则 $Y_n \sim b(n,\frac{1}{2})$，$E(Y_n)=\frac{n}{2}$。

依题意应有 $P\{0.4<\frac{Y_n}{n}<0.6\}\geqslant 0.9$，即

$$P\{0.4<\frac{Y_n}{n}<0.6\}=P\{|\frac{Y_n}{n}-0.5|<0.1\}=P\{|Y_n-0.5n|<0.1n\}$$
$$\geqslant 1-\frac{n\times 0.5\times 0.5}{0.01n^2}\geqslant 0.9$$

解得 $n\geqslant 250$，即至少需要掷 250 次

例 40.3.2（难度系数 0.4，跨知识点 34）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

其中，m 为正整数，

证明：$P\{0<X<2(m+1)\}\geqslant \frac{m}{m+1}$。

解析：此题是估计事件的概率，应考虑用切比雪夫不等式求解，由此需要先计算随机变量的数学期望和方差。

证明：依题可得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(m+2)}{m!}=\frac{(m+1)!}{m!}=m+1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m+2}}{m!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{m!}\int_{0}^{+\infty}x^{(m+3)-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(m+3)}{m!}=(m+2)(m+1),$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=(m+2)(m+1)-(m+1)^2=m+1。$$

由切比雪夫不等式可得：

$$P\left\{0<X<2(m+1)\right\}=P\left\{\left|X-(m+1)\right|<m+1\right\}\geqslant 1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}。$$

例 40.3.3 （难度系数 0.4，2001 年考研数学一真题）　设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$______。

解析: 本题考查切比雪夫不等式的应用。注意在概率论中涉及估值的仅切比雪夫不等式，因此凡是题目出现不等式的题目均要联想到用切比雪夫不等式。

解：由切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$，令 $\varepsilon=2$，$D(X)=2$，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}。$$

例 40.3.4 （难度系数 0.8，2003 年考研数学三真题）　设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于______。

解析：本题考查切比雪夫大数定律及依概率收敛概念，关键在于验证定理的条件。注意比较“依概率收敛”与高等数学中“收敛”概念的异同。

解：由题设可知 $X_i\sim E(2)$，因此 $E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$；于是 $E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，且方差存在，故根据切比雪夫大数定律，有：

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{2}|<\varepsilon\right\}=1,$$

即当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\dfrac{1}{2}$。

知识点 41　中心极限定理

更多资源请扫二维码:

41.1　概念、定理

1．概念

定义 41.1.1　中心极限定理　概率论中有关随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的极限分布是正态分布的定理，统称为中心极限定理。

2．定理

定理 41.1.1 独立同分布的中心极限定理（列维-林德伯格定理）　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，它们的数学期望 $E(X_k) = \mu$ 和方差 $D(X_K) = \sigma^2 > 0$，$k = 1, 2, \cdots$ 则 $\lim\limits_{n \to \infty} P\left\{ \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right\} = \Phi(x)$。

注：定理说明当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 分布。清楚这一点便于记忆定理。

定理 41.1.2　德莫佛-拉普拉斯中心极限定理　设随机变量 $X_n \sim b(n, p)$，$0 < p < 1$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} P\left\{ \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x \right\} = \Phi(x)$。

注：定理说明当 n 充分大时，X_n 近似服从 $N(np, np(1-p))$ 分布。

41.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 21
- **主要题型**：（1）求事件的概率；（2）已知概率确定样本总数。
- **综述**：利用中心极限定理来计算事件的概率，首先要清楚应该选择用独立同分布中心极限定理还是用德莫佛-拉普拉斯中心极限定理，若是一组相互独立同分布且方差

已知的随机变量的问题，用独立同分布中心极限定理，而德莫佛-拉普拉斯中心极限定理是将二项分布分解为若干个独立的 0-1 分布来处理，运算时还需要用公式转化为正态分布求其值。

41.3　经典例题精解巧析

例 41.3.1（难度系数 0.2）　随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 独立同分布，且 X_i 服从参数为 4 的泊松分布，$\bar{X}$ 是其算术平均值，则根据中心极限定理有 $P\{\bar{X} \leqslant 4.392\} =$ ______。

解析： 由于涉及 100 个独立同分布的随机变量，可用列维-林德伯格中心极限定理。

由题知 X_i 服从参数为 4 的泊松分布，$E(X_i) = 4, D(X_i) = 4 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $E(\bar{X}) = 4$，$D(\bar{X}) = \dfrac{4}{100} = 0.04$。由中心极限定理知，$\bar{X}$ 近似服从 $N(4, 0.2^2)$ 分布，故

$$P\{\bar{X} \leqslant 4.392\} = \Phi(\frac{4.392-4}{0.2}) = \Phi(1.96) = 0.975 \text{。}$$

解：0.975。

例 41.3.2（难度系数 0.4）　某单位有 200 台电话机，每台电话机大约有 5%的时间使用外线通话，问该单位总机至少需安装多少条外线，才能以 90%以上的概率保证每台电话机需要使用外线时可供使用?

解析： 以使用电话机的台数作为随机变量讨论该问题，因为此随机变量服从二项分布，故可用德莫佛-拉普拉斯中心极限定理。

解：设使用外线的电话机台数为 X，则 $X \sim b(200, 0.05)$，且 $E(X) = 10, D(X) = 9.5$，由中心极限定理可知 X 近似服从 $N(10, 9.5)$，因此可直接设此时 X 服从 $N(10, 9.5)$。

设该单位总机安装 k 条外线，可以使 $P\left\{X \leqslant k\right\} = \Phi(\dfrac{k-10}{\sqrt{9.5}}) \geqslant 0.90 = \Phi\left(1.28\right)$，即 $\dfrac{k-10}{\sqrt{9.5}} > 1.28$，解得 $k > 13.968$，故该单位总机至少需安装 14 条外线。

例 41.3.3（难度系数 0.6）　据以往经验某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现在随机的抽取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件寿命总和大于 1920 小时的概率。

解析： 涉及 16 个独立同分布的随机变量，可用列维-林德伯格中心极限定理作近似计算，应用定理时先根据原分布计算相应的数字特征，再转化为标准正态分布计算。

解：设第 i 只寿命为 $X_i\ (1 \leqslant i \leqslant 16)$，故 $E(X_i) = 100$，$D(X_i) = 100^2\ (1 \leqslant i \leqslant 16)$，

则 $P(\sum\limits_{i=1}^{16} X_i \leqslant 1920) = P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{16} X_i - 1600}{\sqrt{16} \times 100} \leqslant \dfrac{1920-1600}{\sqrt{16} \times 100}\right) = P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{16} X_i - 1600}{400} \leqslant 0.8\right)$

$$= \Phi(0.8) = 0.7881 \text{。}$$

从而 $P(\sum_{i=1}^{16} X_i > 1920) = 1 - P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leqslant 1920) = 1 - 0.7881 = 0.2119$ 。

招数 41.3.1　绝招：凡遇到求解多个独立且同分布的随机变量的函数满足某种关系的概率问题，则应马上联想到中心极限定理。

例 41.3.4（难度系数 0.6）　抽样检查其他产品质量时，如果发现次品数多于 10 个，则拒绝接受这批产品。设某批产品的次品率为 10%，问至少应抽多少个产品检查才能保证拒绝接受该产品的概率达到 0.9?

解析：本题考查德莫佛－拉普拉斯定理的近似计算。

解：设 n 为至少应抽的产品数，X 为其中的次品数，则 $X \sim b(n, 0.1)$，故由德莫佛-拉普拉斯定理有：$P(10 < X \leqslant n) = P\left(\frac{10 - n\times 0.1}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}} < \frac{X - n\times 0.1}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}} \leqslant \frac{n - n\times 0.1}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}\right)$

$$= \Phi\left(3\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 0.1\times n}{0.3\sqrt{n}}\right)。$$

当 n 充分大时，$\Phi\left(3\sqrt{n}\right) \approx 1$。

由题意知 $1 - \Phi\left(\frac{10 - 0.1\times n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.9$，即 $\Phi\left(\frac{10 - 0.1\times n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.1$。

查表得：$\frac{10 - 0.1\times n}{0.3\sqrt{n}} = -1.28$，即 $n = 147$.

例 41.3.5（难度系数 0.6，2002 年考研数学四真题）　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据列维-林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（　　）。

（A）有相同的数学期望　　（B）有相同的方差

（C）服从同一指数分布　　（D）服从同一离散型分布

解析：本题考查列维-林德伯格中心极限定理的应用。注意审查题目是否符合定理的条件。

根据列维-林德伯格定理的条件，可知（A）、（B）均不成立；而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 仅服从同一离散型分布是不够的，因为 $E(X)$ 与 $D(X)$ 不一定存在，故选择（C）。

解：（C）。

例 41.3.6（难度系数 0.6，2005 年考研数学四真题）　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 λ 的指数分布，则（　　）。

（A）$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$　　（B）$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

解析：本题考查列维-林德伯格中心极限定理的应用，对此类题型，关键在于理解中心极限定理，因此准确把握每一个知识点是考出好成绩的保障。

本题选择（C），理由如下：$E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{n}{\lambda}$，$D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{n}{\lambda^2}$；由中心极限定理知

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{\dfrac{n}{\lambda^2}}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)。$$

解：（C）。

招数 41.3.2　妙招：此类题型属中心极限定理的应用，因此将此随机变量中心化即可解决问题。

第 5 篇综合测试题

5.1　随机变量 X 的数学期望为 2，方差为 $\dfrac{1}{4}$，试用切比雪夫不等式估计 $P\{0<X<4\}$。（知识点 40，难度系数 0.2）

5.2　利用切比雪夫不等式估计随机变量与其数学期望之差大于 3 倍标准差的概率。（知识点 40，难度系数 0.4）

5.3　在某次随机试验中，事件 A 发生的概率为 0.5，利用切比雪夫不等式估计：在 1000 次试验中事件 A 发生的次数在 400～600 次之间的概率。（知识点 40，难度系数 0.6）

5.4　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布。$E(X_i)=0$，$D(X_i)=\sigma^2$，又 $E(X_i^4)$ 存在 $i=1,2,\cdots$，试证明：对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i{}^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right)=1$。（知识点 40，难度系数 0.8）

5.5　有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m。现从这批木柱中随机取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？（知识点 41，难度系数 0.8）

5.6　一生产线上源源不断地生产成箱的零件，假设每箱平均重 50kg，标准差为 5kg，若用最大载重量为 5t 的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977?（$\Phi(2)=0.977$）（知识点 41，难度系数 0.8，2001 年考研数学三、四真题）

5.7　某药厂断言，该厂生产的某种药品对于一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，

否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少?（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少?（知识点 41，难度系数 0.8）

5.8 某保险公司多年的资料统计表明，在索赔户中被盗户占 20%，在随意抽查的 100 家索赔户中被盗的索赔数为随机变量 X。（1）写出 X 的分布律；（2）利用德莫佛-拉普拉斯定理，求被盗的索赔户数不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似值。（知识点 41，难度系数 1.0）

第 5 篇综合测试题详解

5.1 解析： 本题考查切比雪夫不等式的应用。注意不等式的等价变形。

解： 由已知得 $E(X)=2$，$D(X)=\dfrac{1}{4}$，令 $\varepsilon=2$，因此可得

$$\begin{aligned}P\{0<X<4\}&=P\{-2<X-2<2\}\\&=P\{-\varepsilon<X-E(X)<\varepsilon\}\\&\geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{\frac{1}{4}}{2^2}=\frac{15}{16}。\end{aligned}$$

5.2 解析： 本题考查切比雪夫不等式的应用。

解： 在切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|>\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 中，令 $\varepsilon=3\sqrt{D(X)}$，因此有

$$P\left\{|X-E(X)|>3\sqrt{D(X)}\right\}\leqslant\frac{D(X)}{(3\sqrt{D(X)})^2}=\frac{1}{9}。$$

5.3 解析： 本题考查二项分布的概念、数学期望及切比雪夫不等式的应用。

解： 设 X 表示 1000 次试验中事件 A 发生的次数，则 $X\sim b(1000,0.5)$，此时有 $E(X)=1000\times0.5=500$。

在切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 中，取 $\varepsilon=100$，则事件 A 发生的次数在 400～600 次之间的概率为

$$P\{400<X<600\}=P\{|X-500|<100\}\geqslant 1-\frac{250}{(100)^2}=0.975。$$

5.4 解析： 本题考查切比雪夫大数定律的证明及应用。注意独立性的应用。

解： 由于 $X_i^2\ (i=1,2,\cdots)$ 的数学期望为 $E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2$，令 X_i^2 的方差为 σ^2，则 $\delta^2=D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=E(X_i^4)-\sigma^4$。由于 $X_i^2\ (i=1,2,\cdots)$ 仍是相互独立的，故 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望和方差分别为

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\sigma^2，\quad D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}。$$

对$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$应用切比雪夫不等式可知$1>P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$。

当$n\to\infty$时，由极限的夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\}=1$。

5.5　解析：本题考查德莫佛-拉普拉斯中心极限定理的应用。

解：设 100 根中有X根短于 3m，则$X\sim b(100,0.2)$，根据德莫佛–拉普拉斯中心极限定理，可知X近似地服从正态分布，从而

$$P\{X\geqslant 30\}=1-P\{X<30\}\approx 1-\Phi\left(\frac{30-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right)$$

$$=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062。$$

5.6　解析：要应用中心极限定理，首先要正确假设随机变量，本题因为要求箱数，而题目中已有的数据都是和每箱的重量有关，故考虑假设第i箱的重量为随机变量，进而解题。

解：设每辆车装n箱，X_i表示第i箱的重量，则$E(X_i)=50$，$D(X_i)=5^2$。

由中心极限定理知，汽车载重量$\sum_{i=1}^{n}X_i$近似地服从$N(50n,25n)$分布，为保证不超载的概率为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant 5000\right\}=\Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}})>0.977=\Phi(2)，$$

则$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}>2$，即$n<98.0199$，故最多可以装 98 箱。

5.7　解析：本题考查德莫佛-拉普拉斯中心极限定理的应用。针对的是二项分布的近似，因此一开始的分析过程完全是针对二项分布，然后再考虑近似。

解：设X为 100 人中治愈的人数，则$X\sim b(100,p)$。

（1）若$p=0.8$，由德莫佛-拉普拉斯定理知

$$P(X>75)=1-P\{X\leqslant 75\}=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(-\frac{5}{4})=\Phi(\frac{5}{4})=0.8944。$$

（2）若$p=0.7$，由德莫佛–拉普拉斯定理知

$$P\{X>75\}=1-P\{X\leqslant 75\}=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379\text{。}$$

5.8 解析：德莫佛-拉普拉斯定理在实际中有着广泛的应用，运用此定理计算概率近似值时，其关键是“正态近似”和“标准化”，当n越大时，所得的近似值误差越小。

解：（1）根据题意可知，100 家索赔户中被盗的索赔户数$X\sim b(100,0.2)$，即X的分布律为

$$P(X=k)=C_{100}{}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{100-k},\quad k=0,1,2,\cdots,100\text{。}$$

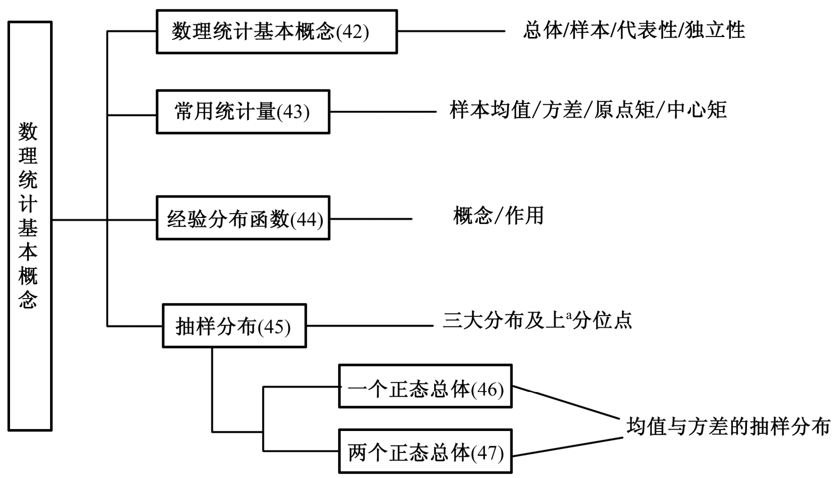
（2）由$np=100\times0.2=20$。$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{100\times0.2\times0.8}=4$，根据德莫佛-拉普拉斯定理可知

$$P(14\leqslant X\leqslant30)=P\left(\frac{14-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=P\left(1.5\leqslant\frac{X-20}{4}\leqslant2.5\right)$$

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.994+0.933-1=0.927\text{。}$$

第 6 篇　数理统计的基本概念

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 6 篇

综　　述

更多资源请扫二维码：

数理统计是以概率论为理论基础，结合试验或观察得到的大量统计数据来研究随机现象客观规律性的一个数学分支。本篇主要介绍数理统计的基本概念[42]，这些概念是数理统计的基础，也是联系概率论与数理统计的纽带。

数理统计中把研究对象的某个数量指标的全体称为总体，而把每个研究对象的数量指标称为个体。为了研究总体，一般的做法是从这个总体中随机抽取一定数量的个体进行观察，这一过程称为抽样，抽样所得的个体称为样本，简单随机样本是一组相互独立且具有相同分布的随机变量，这是对总体进行统计分析和推断的依据；样本的观察值称为样本值，针对试验所得的样本值，一方面可借助经验分布函数[44]得到总体分布函数的近似；另一方面针对不同的统计问题可构造不同的样本函数（即多维随机变量的函数），不包含任何未知参数的样本函数称为统计量[43]，统计量的分布称为抽样分布[45]，统计量及其抽样分布是统计推断的基本工具。为了讨论抽样分布，首先必须熟练掌握一些常见的统计量，如样本均值和样本方差等；其次必须掌握常见的数理统计三大分布：χ^2分布、t分布、F分布，对此三大分布，必须清楚其定义（定义中的概率密度式无须记忆）、性质及特点，掌握通过查表计算其所表示事件的概率的方法；最后结合总体的分布情况分别讨论一个正态总体下的常见统计量的分布[46]及两个正态总体下的常见统计量的分布[47]，这些分布的结论分别通过三个定理表示出来，它们是数理统计处理问题的基础，许多常见的抽样分布都是由这些常用统计量的分布并结合三大分布对应随机变量的组成方法推导产生的。

注：文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 42　数理统计的基本概念、样本的概率分布

更多资源请扫二维码:

42.1　概念、结论

1．概念

定义 42.1.1　总体　在数理统计中，常把被考察对象的某一个（或多个）指标的全体称为总体；组成总体的每个单元叫做个体；从总体中抽出的一部分个体叫做抽样，所抽出的个体的数量叫做样本容量。

定义 42.1.2　简单随机样本　若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且与总体 X 具有相同的分布，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从总体 X 中得到的容量为 n 的简单随机样本，简称样本，样本也可看作随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 。对样本进行一次观察所得的值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样本值。

2．结论

结论 42.1.1　简单随机样本的两个特征：

（1）样本具有随机性，即样本中每一 X_i 与总体 X 具有相同的分布；

（2）样本有独立性，即 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。

42.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 29
- **主要题型**：计算统计量的数字特征。
- **综述**：利用样本中的个体相互独立且具有相同的分布，并结合数字特征的诸性质及计算方法可计算出统计量的数字特征。

42.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　**例 43.3.1**

例 42.3.1（难度系数 0.2）设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自正态总体 $N(2,4)$ 的简单随机样本，

则 $E[(\bar{X})^2]=$______。

解析：本题考查统计计量的数学期望，利用正态总体样本均值的数字特征计算。

解：因为 $D(\bar{X})=E[(\bar{X})^2]-[E(\bar{X})]^2$，且根据总体服从 $N(2,4)$ 分布，可得 $\mu=2$，$\sigma^2=4$，$n=4$。

因为 $E(\bar{X})=\mu=2$，$D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=1$，所以 $E[(\bar{X})^2]=D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=5$。

例 42.3.2（难度系数 0.4）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$E(X)=-1$，$E(X^2)=4$，则 $\bar{X}\sim$______。

解析：本题考查正态总体样本均值的分布，首先知道正态总体的样本均值服从正态分布，下面只需求其参数，再通过数学期望与方差的性质即可求出来。

解：由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，且根据正态分布的和服从正态分布，所以

$$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\mu,$$

$$D\left(\bar{X}\right)=D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}。$$

所以 $\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，其中 $\mu=E(X)=-1$，$\sigma^2=D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=3$，即 $\bar{X}\sim N(-1,\dfrac{3}{n})$。

例 42.3.3（难度系数 0.6）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，求 $E(S^2)$。

解析：本题考查样本方差的数学期望，样本方差是总体方差的无偏估计，因此求样本方差的数学期望即等于求总体的方差。

解：由题意，得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 而且样本方差是总体方差的无偏估计量，即

$$E(S^2)=D(X)=E(X^2)-E^2(X);$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0;$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2。$$

所以 $E(S^2)=2$。

例 42.3.4（难度系数 0.8，跨知识点 38，39）设 X_1、X_2 是取自总体 X 的一个样本，试证：$X_1-\overline{X}$ 与 $X_2-\overline{X}$ 的相关系数等于-1。

解析：根据样本的特点，利用协方差与方差的关系及运算性质计算相关系数，计算过程中注意样本中个体之间是相互独立的，因而其协方差为零。

证明： 由于 X_1、X_2 独立且同分布，则 $\mathrm{Cov}(X_1,X_1)=D(X_1)=\sigma^2$，$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，$\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{X_1+X_2}{2})=\dfrac{1}{2}[\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)]=\dfrac{1}{2}(\sigma^2+0)=\dfrac{1}{2}\sigma^2$，同样计算得 $\mathrm{Cov}(X_2,\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{2}$；$\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{2}$，

$$D(X_1-\overline{X})=D(X_1)+D(\overline{X})-2\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{2}-2\frac{1}{2}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2,$$

同样计算得 $D(X_2-\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{2}$。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_2-\overline{X})&=\mathrm{Cov}(X_1,X_2)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_2)+\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})\\&=0-\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}=-\frac{\sigma^2}{2},\end{aligned}$$

$$\rho_{X_1-\overline{X},X_2-\overline{X}}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_2-\overline{X})}{\sqrt{D(X_1-\overline{X})}\sqrt{D(X_2-\overline{X})}}=\frac{-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\dfrac{\sigma^2}{2}}=-1。$$

例 42.3.5（难度系数 0.6，2015 年考研数学三真题）设总体 $X\sim b(m,\theta)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$（　　）。

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$　　（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　（D）$mn\theta(1-\theta)$

解析： 本题考查统计量的数学期望的计算，特别注意公式的灵活应用。

根据样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 的性质知 $E(S^2)=D(X)$，而根据 $X\sim b(m,\theta)$，可知 $D(X)=m\theta(1-\theta)$，从而

$$E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=(n-1)E(S^2)=m(n-1)\theta(1-\theta)。$$

故选择（B）。

解：（B）。

招数 42.3.1 怪招： 因为直接计算复杂统计量的数字特征太烦琐，所以常利用数字特征的性质转化为常用统计量的数字特征进行计算。

例 42.3.6（难度系数 0.8，跨知识点 35，38；2005 年考研数学一、三、四真题） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $Y_i=X_i-\overline{X}\ (i=1,2,\cdots,n)$，求：（1）$D(Y_i)$；（2）$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；（3）$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$。

解析： 本题考查统计量的数字特征计算，特别注意到以下结论：第一，样本中的个体是独立同分布的；第二，相互独立的正态随机变量的线性组合还是正态分布；第三，

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X<\mu\}=\dfrac{1}{2}$。

解：（1）由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是独立同分布的随机变量，则根据方差的性质可知

$$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D\left[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}X_k\right]$$

$$=(1-\frac{1}{n})^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}D(X_k)=\frac{(1-n)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

（2）由于总体 $X\sim N(0,1)$，则 $E(X^2)=E(X_i^2)=D(X)+[E(X)]^2=1$，

$$E(X_1X_n)=E(X_1)E(X_n)=0。$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_1,Y_n)&=E\{[Y_1-E(Y_1)][Y_n-E(Y_n)]\}=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]\\&=E(X_1X_n)+E(\overline{X}^2)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})\\&=E(X_1)E(X_n)+D(\overline{X})-\frac{1}{n}E(X_1^2)-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}E(X_1X_k)\\&\quad-\frac{1}{n}E(X_n^2)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}E(X_kX_n)=-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

（3）由于 $Y_1+Y_n=X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}=\dfrac{n-2}{n}X_1-\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=2}^{n-1}X_i+\dfrac{n-2}{n}X_n$，可见 Y_1+Y_n 可表示为相互独立的正态随机变量的线性组合，故 Y_1+Y_n 服从正态分布，且

$$E(Y_1+Y_n)=E(\frac{n-2}{n}X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+\frac{n-2}{n}X_n)=0。$$

故 $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$。

例 42.3.7（难度系数 0.8，跨知识点 35，50；2008 年考研数学一、三真题） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2$。(1)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;(2)当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，求 $D(T)$。

解析：本题考查统计量的数学期望的计算，具体计算时必须注意利用已知正态分布的数字特征，从而简化计算。

证明：由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，故 $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$。

（1） $E(T)=E(\overline{X}^2)-\dfrac{1}{n}E(S^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2-\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\dfrac{\sigma^2}{n}=\mu^2$，故 T 是 μ^2 的无偏估计量。

（2）当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，代入得 $(\frac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}})^2=(\sqrt{n}\overline{X})^2\sim\chi^2(1)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$；因为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，所以方差 $D\left(\chi^2\right)=2n$，故

$$\begin{aligned}D(T)&=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)\\&=\frac{1}{n^2}D(\sqrt{n}\overline{X})^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]\\&=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n(n-1)}\text{。}\end{aligned}$$

知识点 43　统计量的分布及常用统计量的分布

更多资源请扫二维码:

43.1　概念

定义 43.1.1　统计量　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，且其中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为统计量；统计量的分布称为抽样分布。

定义 43.1.2　常用统计量　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，定义如下。

（1）样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

（2）样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$；

（3）样本标准差：$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

（4）样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\quad(k=1,2,\cdots)$；

（5）样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k\ (k=2,3,\cdots)$。

43.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 33，知识点 35，知识点 42
- **主要题型**：（1）计算随机变量的样本均值、方差及其他数字特征；（2）正态总

体的样本均值及相关事件的概率。

● **综述**：根据样本中的个体独立同分布，结合数字特征的定义、性质及计算方法可计算所求的数字特征；对正态总体的样本均值及相关事件的概率问题，关键在于公式 $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ 的运用。

43.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 46.3.1 例 46.3.3

例 43.3.1 （难度系数 0.2） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)\ (\sigma > 0)$ 的简单随机样本，求：（1） $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 的联合概率密度；（2） $\overline{X}$ 的概率密度。

解析：由于简单随机样本独立同分布，所以其个体均服从相同的正态分布，且相互独立，故可利用正态分布的性质求它们的联合概率密度。

解：（1）根据已知可得 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 独立且均服从 $N(\mu, \sigma^2)\ (\sigma > 0)$ 分布，于是 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 的联合概率密度为

$$f(x_1, \cdots, x_{100}) = \prod_{i=1}^{100} f(x_i) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-50} \sigma^{-100} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$（-\infty < x_i < +\infty，\ i = 1, 2, \cdots, 100）$$

（2）由于 $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{100})$，所以 $\overline{X}$ 的概率密度为

$$f_{\overline{X}}(z) = \frac{10}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{50(z-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad (-\infty < z < +\infty)。$$

例 43.3.2 （难度系数 0.4）设总体 $X \sim N(52, 6.3^2)$，在总体 X 中随机抽取一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8～53.8 之间的概率。

解析：由于总体为正态分布，故可求样本均值的正态分布，再利用正态分布中心化的过程将题目所求概率转化为查标准正态分布表计算相关事件的概率。

解：因 $X \sim N(52, 6.3^2)$，则 $\overline{X} \sim N(52, \dfrac{6.3^2}{36})$，

$$P\{50.8 < \overline{X} < 53.8\} = P\left\{-\frac{1.2}{\frac{6.3}{6}} < \frac{\overline{X} - 52}{\frac{6.3}{6}} < \frac{1.8}{\frac{6.3}{6}}\right\}$$

$$= \Phi(\frac{12}{7}) - \Phi(\frac{-8}{7}) = 0.8293。$$

例 43.3.3 （难度系数 0.6） 设总体 X 服从 $N(20, (\sqrt{3})^2)$，从中分别抽取容量为 10 和 15 的两个简单随机样本，试求这两个样本均值之差的绝对值大于 0.3 的概率。

解析：首先利用总体的正态分布，求两组样本的样本均值的正态分布，再求两个样

本均值之差所服从的正态分布，最后利用正态分布中心化过程计算相关事件的概率。

解：设 $\overline{X}$ 是容量为 10 的样本的样本均值，$\overline{Y}$ 为容量为 15 的样本的样本均值，则 $\overline{X} \sim (20, \frac{3}{10})$，$\overline{Y} \sim (20, \frac{3}{15})$；由于两组样本相互独立，故 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，且 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(0, \frac{3}{10} + \frac{3}{15}\right) = N(0, 0.5)$，因此 $Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{0.5}} \sim N(0,1)$。所以

$$P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.3\} = P\{|Z| > \frac{0.3}{\sqrt{0.5}}\} = 2[1 - \Phi(0.424)] = 2(1 - 0.6628) = 0.6744。$$

例 43.3.4（难度系数 0.6，2009 年考研数学三真题） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $b(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。记统计量 $T = \overline{X} - S^2$，则 $E(T)$ ＝______。

解析：本题考查数理统计的基本概念及数字特征的计算。

解：根据数学期望的性质知：

$$E(T) = E(\overline{X} - S^2) = E(\overline{X}) - E(S^2),$$

由于 $X \sim b(n,p)$，所以 $E(X) = E(\overline{X}) = np$，$E(S^2) = D(X) = np(1-p)$，故

$$E(T) = np - np(1-p) = np^2。$$

例 43.3.5（难度系数 0.8，2014 年考研数学三真题） 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $E(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \theta^2$，则 $c =$ ________。

解析：利用随机变量函数的数学期望计算总体的二阶中心矩，再利用数学期望的性质计算所给统计量的数学期望。

解：根据定义 34.1.2 和数学期望的性质可知：

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{\theta}^{2\theta} x^2 \frac{2x}{3\theta^2} \mathrm{d}x = \frac{5\theta^2}{2},$$

$$E(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = ncE(X^2) = \frac{5cn\theta^2}{2},$$

由条件 $E(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \theta^2$，得 $c = \frac{2}{5n}$。

知识点 44　经验分布函数

更多资源请扫二维码:

44.1　概念、结论

1．概念

定义 44.1.1 经验分布函数　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，用 $S(x)(-\infty < x < +\infty)$ 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中不大于 x 的随机变量的个数，定义经验分布函数为 $F_n(x) = \dfrac{S(x)}{n}, -\infty < x < +\infty$。

2．结论

结论 44.1.1　经验分布函数的计算方法。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是总体 X 的一个容量为 n 的样本的观察值，将其按从小到大的次序排列，并重新编号，设为 $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$，则经验分布函数 $F_n(x)$ 为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若} x < x_{(1)}, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{若} x_{(k)} \leqslant x < x_{(k+1)}, \\ 1, & \text{若} x \geqslant x_{(n)}\text{。} \end{cases}$$

结论 44.1.2　对任一实数 x，当 $n \to \infty$ 时，$F_n(x)$ 以概率 1 一致收敛于分布函数 $F(x)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\} = 1$，说明经验分布函数为总体分布函数的近似。

44.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 13，知识点 42
- **主要题型**：求经验分布函数。
- **综述**：经验分布函数是阶梯函数，其取值介于[0,1]之间，具有单调递增的特点，计算时先将其所有取值排序，再统计出各取值出现的频率，最后按公式即可得到经验分布函数，计算过程中注意频率的累加。

44.3　经典例题精解巧析

例 44.3.1（难度系数 0.2）设 $F_n(x)$ 是总体 X 的经验分布函数，而 $F(x)$ 是总体 X 的分布函数，在下列命题中，对于每个给定的 x，$F_n(x)$ 满足（　　）。

（A）是分布函数　　（B）依概率收敛于 $F(x)$

（C）是一个统计量　　（D）其数学期望是 $F(x)$

解析：本题考查经验分布函数的概念及性质。

由于经验分布函数 $F_n\left(x\right)$ 以概率 1 一致收敛于分布函数 $F\left(x\right)$，故选（B）。

解：（B）。

例 44.3.2（难度系数 0.2）给定样本值 $1,2,1,3,2$，求其经验分布函数。

解析：本题考查经验分布函数的求法，注意经验分布函数是分段函数，其区间的划分是重点。

解：若样本观测值为 $1,2,1,3,2$，则样本的频率分布为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$，故经验分布函数

$$F_n(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{2}{5}, & 1\leqslant x<2, \\ \dfrac{4}{5}, & 2\leqslant x<3, \\ 1, & x\geqslant 3。\end{cases}$$

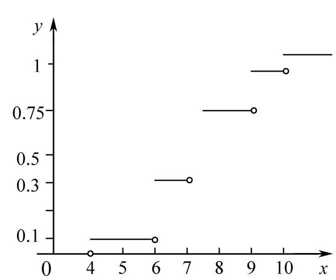
例 44.3.3（难度系数 0.4）某射手独立重复地进行 20 次打靶试验，击中靶子的环数如下：

环数	10	9	8	7	6	5	4
频数	2	3	0	9	4	0	2

用 X 表示此射手对靶射击一次所命中的环数，求 X 的经验分布函数，并画出其图像。

解析：本题考查经验分布函数的求法。

解：设 X 的经验分布函数为 $F_n(x)$，则根据频数表可知：



$$F_n(x)=\begin{cases}0\text{，} & x<4, \\ \dfrac{2}{20}, & 4\leqslant x<6, \\ \dfrac{6}{20}, & 6\leq x<7, \\ \dfrac{15}{20}, & 7\leqslant x<9, \\ \dfrac{18}{20}, & 9\leqslant x<10, \\ 1\text{，} & x\geqslant 10\text{。}\end{cases}$$

知识点 45　抽样分布

更多资源请扫二维码:

45.1　概念、结论

1．概念

定义 45.1.1　抽样分布　统计量的分布称为抽样分布。

定义 45.1.2　χ^2 分布　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 为服从自由度为 n 的 χ^2 分布记为 $x^2\sim x^2(n)$。

定义 45.1.3　t 分布　设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X、Y 相互独立，则称随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t\sim t(n)$ 。

定义 45.1.4　F 分布　设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，且 U、V 相互独立，则称随机变量 $F=\dfrac{\dfrac{U}{n_1}}{\dfrac{V}{n_2}}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$ 。

定义 45.1.5　上 α 分位点　设随机变量服从某种分布，若 $P\{X>a\}=\alpha$，$0<\alpha<1$，则称数 a 为该项分布的上 α 分位点。

2．结论

结论 45.1.1　关于 χ^2 分布　有以下结论：

（1）χ^2 分布的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，说明其图形位于第一象限；

（2）χ^2 分布具有可加性：若 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，且两者相互独立，则有

$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2);$$

（3）若 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则其数学期望 $E(\chi^2)=n$；方差 $D(\chi^2)=2n$。

结论 45.1.2　关于 t 分布，有以下结论：

（1）其概率密度为 $h(t)=\dfrac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\dfrac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},-\infty<t<+\infty$；其图形关于 $t=0$ 对称，且当 n 充分大时，图形逼近标准正态分布记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$；

（2）若 $t\sim t(n)$，则数学期望 $E(t)=0$，方差 $D(t)=\dfrac{n}{n-2}$，$n>2$；

（3）用 $t_\alpha(n)$ 表示 t 分布的上 α 分位点，则 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$。

结论 45.1.3　关于 F 分布，有以下结论：

（1）F 分布的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(n_2/2)\Gamma(n_1/2)[1+(n_1y/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，其图形位于第一象限；

（2）若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则数学期望 $E(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}\ (n_2>2)$，方差

$$D(F(n_1,n_2))=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}\quad n_2>4;$$

（3）若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$；

（4）若用 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 表示 F 分布的上 α 分位点，则 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$。

结论 45.1.4　若 $t\sim t(n)$，则 $t^2\sim F(1,n)$。

45.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：**4
- **最关联知识点：**知识点 21，知识点 32

● **主要题型**：（1）求统计量的分布或所表示事件的概率；（2）已知统计量的分布或事件的概率，求统计量中的参数。

● **综述**：在熟悉样本的三大分布所对应的随机变量组合结构的基础上，根据常用统计量的性质及其分布，正确利用方法可确定相关统计量的分布或其中的参数，相关事件的概率则利用上α分位点来计算。

45.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引： 例 46.3.3， 例 46.3.6

例 45.3.1 （难度系数 0.4） 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本，且$a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2$分布，则$a=$______，$b=$______。

解析：本题考查χ^2分布的概念及构成方法，求解过程中注意利用以下两点：（1）正态分布的概念及性质；（2）χ^2分布的构成方法。

解：由于总体$X\sim N(0,2^2)$，根据样本及正态分布的特征，计算知$E(X_1-2X_2)=0$，$D(X_1-2X_2)=20$，且$X_1-2X_2\sim N(0,20)$；同样$E(3X_3-4X_4)=0$，$D(3X_3-4X_4)=100$，$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$。

因此$\dfrac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$， $\dfrac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$，且它们相互独立，所以

$$(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}})^2+(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}})^2=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2),$$

故$a=\dfrac{1}{20}$，$b=\dfrac{1}{100}$。

招数 45.3.1 绝招：求统计量的分布的题目一般涉及正态分布与三大分布，对统计量进行观察，若是平方项和的结构形式，则可能服从χ^2分布；若是分式结构形式，则可能服从另外两种分布，继续观察分子是否可转化为正态分布，若是则可能为t分布，若分子是χ^2分布，则可能是F分布。

例 45.3.2（难度系数 0.6） 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自总体$X\sim N\left(\mu,4^2\right)$的简单随机样本，已知$P\left(S^2>a\right)=0.1$，求常数$a$。

解析：本题涉及样本方差相关的概率问题，利用同方差有关的抽样分布，通过已知的概率值求上分位点的值。

解：根据条件$n=10$，$\sigma^2=4^2$，利用$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，得$\dfrac{9S^2}{4^2}\sim\chi^2(9)$，因此

$$P\left\{S^2>a\right\}=P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{(n-1)a}{\sigma^2}\right\}=P\left\{\frac{9S^2}{4^2}>\frac{9a}{16}\right\}。$$

根据已知 $P\left\{\dfrac{9S^2}{4^2}>\dfrac{9a}{16}\right\}=0.1$，利用上侧分位数定义，应有 $\dfrac{9a}{16}=\chi^2{}_{0.1}(9)$，查 χ^2 分布表，得 $\chi^2{}_{0.1}(9)=14.684$，即 $\dfrac{9a}{16}=14.684$，解得 $a=26.1$。

例 45.3.3（难度系数 0.8）　设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，且 $Y_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\dfrac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，证明 $Z\sim t(2)$。

解析：利用招数 45.3.1，求解过程中注意利用（1）正态分布的概念及性质；（2）t 分布的构成方法。

证明：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{6}),$$

$$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{3}),$$

$$\frac{2S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)。$$

又 Y_1,Y_2 相互独立，故 $Y_1-Y_2\sim N(0,\dfrac{\sigma^2}{2})$，$\dfrac{Y_1-Y_2}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$，所以

$$Z=\frac{\dfrac{Y_1-Y_2}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{2\sigma^2}}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2)，即证 Z\sim t(2)。$$

例 45.3.4（难度系数 0.6，2003 年考研数学一真题）　设随机变量 $X\sim t(n)\ (n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则______。

（A）$Y\sim\chi^2(n)$　（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$　（C）$Y\sim F(n,1)$　（D）$Y\sim F(1,n)$

解析：本题考查 t 分布与 F 分布的构成方法。注意：常见统计量的三大分布，利用其构成方法，即可将其按定义对随机变量进行分解。

解：由于 $X\sim t(n)\ (n>1)$，则按定义 45.1.3，存在 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，使 $X=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}\sim t(n)$，而此时 $Y=\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{X_2/n}{X_1^2}$；这里的 $X_1^2\sim\chi^2(1)$，而 $X_2\sim\chi^2(n)$，因此 $Y=\dfrac{1}{X^2}\sim F(n,1)$，故选择（C）。

例 45.3.5（难度系数 0.6，2013 年考研数学一真题）　设随机变量 $X \sim t(n)$，$Y \sim F(1,n)$，给定 α，其中 $0<\alpha<0.5$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$______。

（A）α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

解析：本题考查 t 分布的概念及 t 分布与 F 分布之间的关系，求解的关键在于:（1）清楚随机变量 X、Y 的关系;（2）清楚 t 分布概率密度的函数曲线关于 Y 轴对称，因此若 $X \sim t(n)$，则 $P\{X>c\}=P\{X<-c\}$。

解：因 $X \sim t(n)$，则其概率密度函数曲线关于 Y 轴对称，且用类似例 45.3.4 的方法易得 $X^2 \sim F(1,n)$。因为 $Y \sim F(1,n)$，即 X^2 与 Y 同分布，故

$$P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{X>c\}+P\{X<-c\}=2P\{X>c\}=2\alpha。$$

故选择（C）。

例 45.3.6（难度系数 0.6）　设 X_1、X_2 是来自总体 $X \sim N\left(1,\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$ 的一个样本，求：$P\{\left(X_1-X_2\right)^2 \leqslant 0.408\}$。

解析：本题考查 χ^2 分布的概念及构成方法。

解：由条件知 $X_1-X_2 \sim N(0,4)$，故 $\dfrac{X_1-X_2}{2} \sim N(0,1)$，从而 $\left(\dfrac{X_1-X_2}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1)$。因此有

$$P\{\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2 \leqslant \frac{0.408}{4}\}=1-P\{\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2>0.102\}$$

$$=1-P\{\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2>\chi^2_{0.75}(1)\}=1-0.75=0.25。$$

招数 45.3.2 无招胜有招：　针对统计量的概率计算，利用招数 45.3.1 确定相关统计量的分布之后，借用分位数可计算出概率值。

例 45.3.7（难度系数 0.6，跨知识点 21、29）　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 为来自总体 $N(3,100)$ 的简单随机样本，求 $P\{0<\overline{X}<6, 57.70<S^2<151.73\}$。

解析：利用随机变量的独立性，借助样本均值及样本方差的抽样分布计算概率，解题关键:（1）清楚 $\overline{X}$、S^2 相互独立;（2）清楚正态总体样本均值及方差服从的分布。

解：因为根据已知易得 $\overline{X} \sim N(3,\dfrac{10^2}{25})$，$\dfrac{24S^2}{10^2} \sim \chi^2(24)$，且 $\overline{X}$、S^2 相互独立，所以

$$P\{0<\overline{X}<6,\ 57.70<S^2<151.73\}=P\{0<\overline{X}<6\}\cdot P\{57.70<S^2<151.73\}。$$

而

$$P(0<\overline{X}<6)=\Phi(\frac{6-3}{2})-\Phi(\frac{-3}{2})=2\Phi(\frac{3}{2})-1=2\times0.9332-1=0.8664,$$

$$P(57.70<S^2<151.73)=P(13.848<\frac{24S^2}{100}<36.415)=0.95-0.05=0.90,$$

于是 $P\{0<\overline{X}<6, 57.70<S^2<151.73\}=0.8664\times0.90=0.78$。

知识点 46　一个正态总体的抽样分布

更多资源请扫二维码:

46.1　结论

结论 46.1.1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$，则：

（1）由于样本均值 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，所以 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N\left(0,1\right)$；

（2）$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立；

（3）$\chi^2=\dfrac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)$；

（4）$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t\left(n-1\right)$。

注意：$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ 两者的区别。

46.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 21，知识点 45
- **主要题型**：（1）正态总体的样本均值及相关统计量所表示的事件概率；（2）正态总体所构成的统计量所服从的分布。
- **综述**：对正态总体的样本均值等统计量所表示事件的概率，首先要给出相关统计量所服从的分布，其次利用上 α 分位点查表计算。对正态总体所构成的统计量，同样要在清楚三大分布所对应的随机变量结构的基础上，充分利用正态总体的特征及结论给出其分布。

46.3 经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 54.3.2，　例 54.3.3

例 46.3.1（难度系数 0.4）设总体 $X \sim N(30,100)$，从总体 X 中抽取一个容量为 100 的样本，求 $P\left\{29<\overline{X}<31\right\}$。

解析：利用正态总体的样本均值服从正态分布求事件 $\left\{29<\overline{X}<31\right\}$ 的概率。

解：由条件知 $\mu=30$，$\sigma^2=100$，$n=100$，则 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\overline{X}-30\sim N(0,1)$，故

$P\left\{29<\overline{X}<31\right\}=P\left\{\left|\overline{X}-30\right|<1\right\}=P\left\{|Z|<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.626$。

例 46.3.2（难度系数 0.4）设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自总体 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的样本，$Y=\left(X_1+X_2+X_3\right)^2+\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$，则当 $C=$____时，$CY\sim\chi^2(2)$。

解析：利用相互独立的标准正态分布的性质，依据 χ^2 分布的构造方法造出 χ^2 分布。由于 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 相互独立且均服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 分布，则

$$E\left(X_1+X_2+X_3\right)=E\left(X_4+X_5+X_6\right)=0,$$

$$D\left(X_1+X_2+X_3\right)=D\left(X_4+X_5+X_6\right)=3D\left(X_i\right)=3\sigma^2,$$

$$D\left[\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}\left(X_1+X_2+X_3\right)\right]=\frac{1}{3\sigma^2}D\left(X_1+X_2+X_3\right)=1。$$

故 $\dfrac{1}{\sqrt{3}\sigma}\left(X_1+X_2+X_3\right)\sim N(0,1)$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}\sigma}\left(X_4+X_5+X_6\right)\sim N(0,1)$，且两者相互独立，因此当 $C=\dfrac{1}{3\sigma^2}$ 时，$C(Y)\sim\chi^2(2)$。

解：$\dfrac{1}{3\sigma^2}$。

例 46.3.3（难度系数 0.6）　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，记 $S_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，$S_3^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$，$S_4^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是（　　）。

（A）$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　（B）$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　（C）$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　（D）$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

解析：解题的关键:（1）正态总体的样本均值及样本方差的分布;（2）t 分布的构成方法。

解：由正态分布的结论知：$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，因此 $T = \dfrac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$，即

$T = \dfrac{\left(\overline{X}-\mu\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{nS_2^2}{n-1}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$，故选择（B）。

例 46.3.4（难度系数 0.6）　设总体 $X \sim N(3.2, 25)$，从中抽取容量为 n 的样本，若要求其样本均值位于区间 $(1.2, 5.2)$ 内的概率不小于 0.95，则样本容量 n 应该至少取多大？

解析：利用正态总体的样本均值服从的分布求事件发生的概率。

解：由条件知 $\mu = 3.2$，$\sigma^2 = 25$，则 $Z = \dfrac{\overline{X}-3.2}{\dfrac{5}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$，

$$P\left\{1.2 < \overline{X} < 5.2\right\} = P\left\{\frac{1.2-3.2}{5}\sqrt{n} < Z < \frac{5.2-3.2}{5}\sqrt{n}\right\} = 2\varPhi\left(0.4\sqrt{n}\right) - 1 = 0.95,$$

则 $\varPhi\left(0.4\sqrt{n}\right) = 0.975$，故 $0.4\sqrt{n} > 1.96$，即 $n > 24.01$，所以样本容量 n 至少应取 25。

例 46.3.5（难度系数 0.8）　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的一个样本，求下列概率：

（1）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2} \leqslant \dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(X_i - \mu)^2 \leqslant 2\sigma^2\right\}$；

（2）$P\left\{\dfrac{\sigma^2}{2} \leqslant \dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2 \leqslant 2\sigma^2\right\}$。

解析：利用正态总体的抽样分布求事件发生的概率。

解：查 χ^2 分布 表知：$\chi^2_{0.95}(16) = 8$，$\chi^2_{0.01}(16) = 32.00$，$\chi^2_{0.92}(15) = 8$，$\chi^2_{0.005}(15) = 32.00$。

（1）由于 $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{16}\left(X_i - \mu\right)^2 \sim \chi^2(16)$，即有：

$$P\left\{\frac{\sigma^2}{2} \leqslant \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \mu\right)^2 \leqslant 2\sigma^2\right\} = P\left\{8 \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}\left(x_i - \mu\right)^2 \leqslant 32\right\} = P\left\{8 \leqslant \chi^2(16) \leqslant 32\right\}$$

$$= P\left\{\chi^2_{0.95}(16) \leqslant \chi^2(16) \leqslant \chi^2_{0.01}(16)\right\} = 0.99 - 0.05 = 0.94。$$

（2）由于 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$，则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{16}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(15)$。

$$P\left\{\frac{\sigma^2}{2}\leqslant\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\leqslant 2\sigma^2\right\}=P\left\{8\leqslant\chi^2(15)\leqslant 32\right\}$$

$$=P\left\{\chi^2_{0.92}(15)\leqslant\chi^2(15)\leqslant\chi^2_{0.005}(15)\right\}=0.995-0.08=0.915\text{。}$$

注： $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$、$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ 两者的自由度是不同的。

例 46.3.6（难度系数 0.8）　设 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，试求统计量 $T=\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{S^*}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 的分布。

解析：利用招数 45.3.1，注意样本方差 S^2 与 S^{*2} 的差异。

解：由于 $X_{n+1}-\bar{X}\sim N\left(0,\ \dfrac{n+1}{n}\sigma^2\right)$，$\dfrac{nS^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，则

$$T=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S^*}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}=\frac{\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{nS^{*2}}{\sigma^2}}{n-1}}}\sim t(n-1)\text{。}$$

知识点 47　两个正态总体的抽样分布

更多资源请扫二维码:

47.1　结论

结论 47.1.1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的简单随机样本，且这两个样本相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i$，$S_1{}^2=\frac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2{}^2=\frac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$，则

（1）$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$；

（2）$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$；

（3）当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\text{。}$$

47.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 3
- **最关联知识点：** 知识点 21，知识点 45
- **主要题型：** 求两个总体所构成的统计量的分布、数字特征或相关事件的概率。
- **综述：** 首先牢记两个正态总体的结论 47.1.1，然后在清楚三大分布所对应的随机变量结构的基础上，结合正态总体的特征及正态随机变量线性运算的相关结论，从而给出相应统计量的分布，并由此计算该统计量的数字特征及相关事件的概率。

47.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 55.3.3，　例 54.3.2

例 47.3.1（难度系数 0.2）　求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10、15 的两个独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率。

解析： 结论：服从正态分布的总体，其样本均值也服从正态分布，两个服从正态分布的随机变量其和或差也服从正态分布，只需要注意参数的变化。

解： 设 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 为两个独立样本的均值，则 $\bar{X}_1\sim N(20,\dfrac{3}{10})$，$\bar{X}_2\sim N(20,\dfrac{3}{15})$，于是 $\bar{X}_1-\bar{X}_2\sim N(0,\dfrac{1}{2})$，所以

$$\begin{aligned}P\{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|>0.3\}&=1-P\{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|\leqslant 0.3\}\\&=1-\Phi(\frac{0.3}{1/\sqrt{2}})+\Phi(\frac{-0.3}{1/\sqrt{2}})\\&=2-2\Phi(0.42)=2-2\times 0.6628=0.6744\text{。}\end{aligned}$$

例 47.3.2（难度系数 0.6）　设样本 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自相互独立的总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，已知 $\sigma_1=\sigma_2$，α 和 β 是两个实数，求随机变量

$$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}(\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{n_2})}}$$

的分布。

解析：先观察该统计量是两个统计量相除的结构形式，可能服从 F 分布或 t 分布，继续观察发现该分式可化为分子和分母为正态分布和 χ 分布相除的形式，因此确定其服从 t 分布，最后确定 t 分布的参数。

解：依题 $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n}\right)$，则 $\alpha(\bar{X}-\mu_1) \sim N(0, \dfrac{\alpha^2\sigma_1^2}{n_1})$，同理可得

$$\beta(\bar{Y}-\mu_2) \sim N(0, \frac{\beta^2\sigma_2^2}{n_2}),$$

又因为 $\sigma_1 = \sigma_2$，所以 $\alpha(\bar{X}-\mu)+\beta(\bar{Y}-\mu_2) \sim N(0, (\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{n_2})\sigma_1^2)$，即

$$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{n_2}}\sigma_1} \sim N(0,1),$$

而利用 χ^2分布 的可加性知

$$\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2),$$

所以

$$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{\eta_2}\right)}} = \frac{[\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)]/\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{n_1}+\dfrac{\beta^2}{n_2}}\sigma_1}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)\sigma_1^2}}} \sim t(n_1+n_2-2)。$$

例 47.3.3 （难度系数 0.6） 设总体 X、Y 相互独立且都服从 $N(0,3^2)$ 分布，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 分别来自总体 X 和 Y 的两组样本，求 $U = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从的分布。

解析：同例 47.3.2。

解：依题可得 $X_1+X_2+\cdots+X_9 \sim N(0,81)$，则 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9-0}{9} \sim N(0,1)$，且

$$\left(\frac{Y_1-0}{3}\right)^2+\left(\frac{Y_2-0}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9-0}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2) \sim \chi^2(9),$$

所以 $\dfrac{\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9-0}{9}}{\sqrt{\dfrac{1}{9}(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2)/9}} \sim t(9)$，即 $U = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}} \sim t(9)$。

例 47.3.4（难度系数 0.8，2004 年考研数学三真题）设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，求

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]。$$

解析：利用数学期望的性质及样本方差是总体方差的无偏估计的结论，计算所给统计量的数学期望，解题过程中注意公式的灵活应用。

解：依题可知 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，设

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2，\quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2。$$

则有 $E(S_1^2) = \sigma^2$，$E(S_2^2) = \sigma^2$。因此

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] = E\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]$$

$$= \frac{(n_1 - 1)E(S_1^2) + (n_2 - 1)E(S_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2。$$

第 6 篇综合测试题

综合测试题 A

A6.1　用测温仪对一物体的温度测量 5 次，其结果为（℃）：1250，1265，1245，1260，1275，分别求统计量 $\overline{X}$、S^2 和 S 的观察值 $\overline{x}$、s^2、s。（知识点 42，难度系数 0.2）

A6.2　设 X_1, X_2, X_3 是取自总体 X 的一个样本，α 是未知参数，以下函数是统计量的为（　　）。（知识点 42，难度系数 0.2）

（A）$\alpha(X_1 + X_2 + X_3)$　（B）$X_1 + X_2 + X_3$　（C）$\frac{1}{\alpha}X_1X_2X_3$　（D）$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \alpha)^2$

A6.3　设总体 X 在区间 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，从该总体抽取容量为 100 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$，求 $E(\overline{X})$、$D(\overline{X})$、$E(S^2)$。（知识点 43，难度系数 0.4）

A6.4　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 0－1 分布的样本，$P(X = 1) = p$，$P(X = 0) = 1 - p$，则 $E(\overline{X}) =$ ________，$D(\overline{X}) =$ ________，$E(S^2) =$ ________。（知识点 43，难度系数 0.4）

A6.5 给定某样本的一组样本值：6.60，4.60，5.40，5.80，5.40，求其经验分布函数。（知识点 44，难度系数 0.4）

A6.6 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ 是来自总体 $X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，则

$Y = \dfrac{{X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_{10}}^2}{\left({X_{11}}^2 + {X_{12}}^2 + \cdots + {X_{20}}^2\right)}$ 服从__________分布，其参数为__________。（知识点 45，难度系数 0.6）

A6.7 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n \ (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则有______。（知识点 45，难度系数 0.6 ）

（A）$n\overline{X} \sim N(0,1)$　　（B）$nS^2 \sim \chi^2(n)$

（C）$\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　（D）$\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

A6.8 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(0,\ 1)$ 的样本，$\overline{X}$ 和 S 分别为样本的均值和样本标准差，则（　）。（知识点 46，难度系数 0.4）

（A）$\overline{X}/S \sim t(n-1)$　　（B）$\overline{X} \sim N(0,\ 1)$

（C）$(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$　　（D）$\sqrt{n}\overline{X} \sim t(n-1)$

A6.9 设某厂生产的灯泡的使用寿命 $X \sim N\left(3, \sigma^2\right)$（单位：h），随机抽取一容量为 9 的样本，并测得样本均值及样本方差，但是由于工作上的失误，事后失去了此试验的结果，只记得样本方差为 $S^2 = 9$，试求 $P\left\{\overline{X} > 4.86\right\}$。（知识点 46，难度系数 0.6）

A6.10 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别来自相互独立的总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求统计量 $F = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 / n_1\sigma_1^2}{\sum\limits_{j=1}^{n_2}(\mathrm{Y}_j - \mu_2)^2 / n_2\sigma_2^2}$ 服从的分布。（知识点 47，难度系数 0.6）

综合测试题 B

B6.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)\,(\sigma > 0)$ 的简单随机样本，统计量 $T = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，求 $E(T)$。（知识点 42，难度系数 0.4）

B6.2 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n \geqslant 2)$ 是来自总体 X 的一个样本，$\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} X_i$，令 $Y = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$，求 $E(Y)$。（知识点 42，难度系数 0.8）

B6.3 从正态总体 $N(3.4, 6^2)$ 中抽取容量为 n 的简单随机样本，如果要求其样本均值位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量至少应取多大？（知识点 43，难度系数 0.6）

B6.4　设总体 $X \sim N(3,25)$，求该总体的容量分别为 100、250 的两个独立随机样本平均值差的绝对值大于 0.3 的概率。（知识点 46，难度系数 0.6）

B6.5　设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 和 $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ 分别是取自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且相互独立，试求统计量 $U = a\overline{X} + b\overline{Y}$ 的分布，其中 a、b 是不全为零的已知常数；（知识点 47，难度系数 0.8）

第 6 篇综合测试题详解

综合测试题 A 详解

A6.1 解析：基础题型，考查样本均值及样本方差的计算。

解：样本均值为 $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}(1250 + 1265 + 1245 + 1260 + 1275) = 1259$（℃）。

样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{4}\,[(1250-1259)^2] + (1265-1259)^2 + (1245-1259)^2$$

$$+(1260-1259)^2 + (1275-1259)^2] = 142.5 \text{（℃）}^2。$$

样本标准差为 $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{142.5} = 11.94$（℃）。

A6.2 解析：利用统计量中不能包含未知参数可给出答案。用排除法。

解：因（A）、（C）、（D）中均包含有未知参数，只有（B）没有未知参数，符合统计量的定义，故应选（B）。

A6.3 解析：先计算总体的数学期望和方差，再根据随机变量的数学期望与方差的性质可求统计量（作为随机变量的函数）的数学期望和方差。

解：因为总体 X 在区间 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，所以

$$E(X) = \mu = 0,\ D(X) = \sigma^2 = \frac{[1-(-1)]^2}{12} = \frac{1}{3},$$

故

$$E(\bar{X}) = \mu = 0,\ D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{300},\ E(S^2) = D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{3}。$$

A6.4 解析：利用总体的数学期望和方差以及数字特征的性质进行计算。

解：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 0－1 分布的样本，则 $E(X_i) = p$，$D(X_i) = p(1-p)$，

因此　$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\cdot nE(X_i) = p$；$D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\cdot nD(X_i) = \frac{1}{n}p(1-p)$；

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2)=\frac{1}{n-1}\cdot[nE(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)]$$
$$=\frac{1}{n-1}[n(p(1-p)+p^2)-n(\frac{1}{n}p(1-p)+p^2)]$$
$$=\frac{1}{n-1}[np-p-(n-1)p^2]=p(1-p)。$$

A6.5 解析：本题考查经验分布函数的求法。注意经验分布函数是分段函数。

解：将样本值从小到大重新排列：4.60，5.40，5.40，5.80，6.60，则经验分布函数为

$$F_5(x)=\begin{cases}0，x<4.60,\\ \frac{1}{5}，\quad 4.60\leqslant x<5.40,\\ \frac{3}{5}，\quad 5.40\leqslant x<5.80,\\ \frac{4}{5}，\quad 5.80\leqslant x<6.60,\\ 1，\quad 6.60\leqslant x。\end{cases}$$

A6.6 解析：本题考查χ^2、F分布的概念及构成方法。

由条件知$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$，$i=1,2,\cdots,20$，那么

$$\chi_1^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10),\quad \chi_2^2=\sum_{i=11}^{20}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10)。$$

且χ_1^2与χ_2^2相互独立，所以

$$Y=\frac{X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_{10}{}^2}{\left(X_{11}{}^2+X_{12}{}^2+\cdots+X_{20}{}^2\right)}=\frac{\frac{\chi_1{}^2(10)}{10}}{\frac{\chi_2^2(10)}{10}}\sim F(10,10)。$$

所以Y服从F分布，参数为（10，10）。

解：F；（10,10）。

A6.7 解析：本题考查正态总体构成的统计量所服从的分布及F分布。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n\geqslant 2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本，则可知$X_1^2\sim\chi^2(1)$，$\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$，而且两者相互独立，因此

$$\frac{X_1^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}X_i^2}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)。$$

故选择（D）。

解：（D）。

A6.8 解析： 本题考查正态总体的样本均值及样本方差所服从的分布。

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(0, 1)$ 的样本，则样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的数字特征为 $E\left(\overline{X}\right) = 0$，$D\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}$，而且 $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$，所以 $\sqrt{n}\,\overline{X} \sim N(0,1)$，故（B）和（D）错误。

关于样本方差有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，代入有 $\frac{(n-1)}{1^2} S^2 = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$，（C）正确，而且 $\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$，故（A）错误。选择（C）。

解：（C）。

A6.9 解析： 利用正态总体的样本均值服从的分布求事件发生的概率。

解： 由条件知 $\mu = 3$，σ未知，$n = 9$，且 $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - 3}{\frac{3}{3}} \sim t(8)$，查表知 $t_{0.05}(8) = 1.861$，因此 $P\left\{\overline{X} > 4.86\right\} = P\left\{T > \frac{4.86 - 3}{\frac{3}{3}}\right\} = P\left\{T > 1.86\right\} = 0.05$。

A6.10 解析： 两个统计量的商一般均服从 F 分布或 t 分布，本题服从 F 分布，处理的关键在于根据 F 分布的定义，将其分子和分母化为两个服从 χ^2 分布的随机变量相除的形式，由此确定参数。

解： 因 $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，则 $\frac{X_i - \mu_1}{\sigma_1^2} \sim N(0,1)$；$Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $\frac{Y_j - \mu_2}{\sigma_2^2} \sim N(0,1)$，故

$$U = \sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i - \mu_1}{\sigma_1^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 \sim \chi^2(n_1),$$

$$V = \sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{Y_j - \mu_2}{\sigma_2^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2 \sim \chi^2(n_2),$$

因此 $F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 / n_1\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2 / n_2\sigma_2^2} = \frac{U / n_1}{V / n_2} \sim F(n_1, n_2)$。

综合测试题 B 详解

B6.1 解析：考查统计量的数学期望。

解：由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的一组样本，所以

$$E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2,\quad E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以 $E(T)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\dfrac{1}{n}\cdot n(\sigma^2+\mu^2)=\sigma^2+\mu^2$。

B6.2 解析：本题考查统计量的数学期望的计算。

解：由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geqslant 2)$ 是总体服从正态分布的一组样本，设 $Z_i=X_i+X_{n+i}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $Z_i=N(2\mu,2\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 相互独立。

令 $Z=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{Z_i}{n}$，$S^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(Z_i-\overline{Z})^2}{n-1}$，则 $\overline{X}=\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{X_i}{2n}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i=\dfrac{1}{2}\overline{Z}$，因此 $\overline{Z}=2\overline{X}$，同时 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=(n-1)S^2$，所以

$$E(Y)=(n-1)E(S^2)=(n-1)D(Z_i)=2(n-1)\sigma^2。$$

B6.3 解析：已知总体服从正态分布，可知样本均值也服从正态分布，确定参数后，再将正态分布中心化可计算相关事件的概率。

解：由于总体 $X\sim N(3.4,6^2)$，则样本均值 $\bar{X}\sim N(3.4,\dfrac{36}{n})$，根据条件

$$P\left\{1.4<\bar{X}<5.4\right\}=\varPhi\left(\frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right)-\varPhi\left(\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right)=2\varPhi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95,$$

得

$$\varPhi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975=\varPhi(1.96)，即\ \frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96，\quad n\geqslant 34.5744,$$

故样本容量至少应取 35。

B6.4 解析：利用正态总体的样本均值服从的分布求事件发生的概率。

解：已知总体 $X\sim N(3,25)$，设 $\overline{X}$ 是容量为 100 的样本均值，$\overline{Y}$ 是容量为 250 的样本均值，则 $\overline{X}\sim N\left(3,\dfrac{25}{100}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(3,\dfrac{25}{250}\right)$，且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，则

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\frac{25}{100}+\frac{25}{250}\right)=N\left(0,0.35\right),$$

那么 $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{0.35}}\sim N(0,1)$，所以

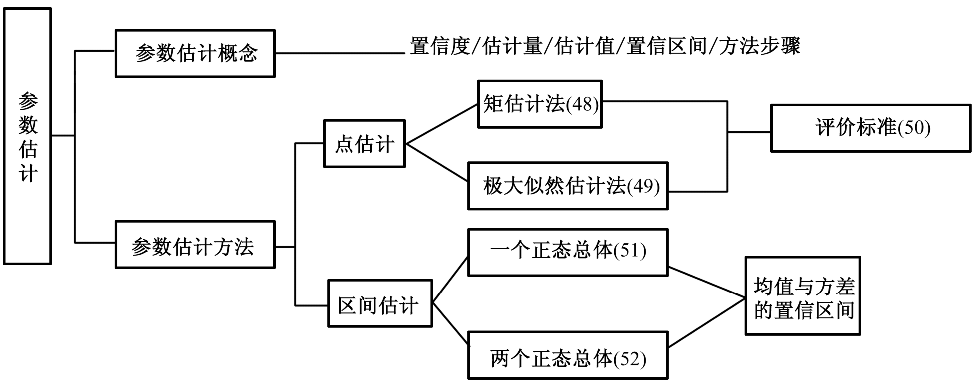
$$P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.3\right\}=P\left\{|Z|>\frac{0.3}{\sqrt{0.35}}\right\}=2\left[1-\varPhi(0.424)\right]=2\left(1-0.6628\right)=0.6744。$$

B6.5 解析：利用样本与总体同分布的特点，再根据两个独立正态分布的随机变量的线性组合的分布仍然为正态分布，则只需要设法求出正态分布的两个参数即可，而依据数学期望与方差的性质可得参数值。

解：由于 $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \cdots, n$，故 $\overline{X} \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n})$，$a\overline{X} \sim N(a\mu_1, \dfrac{a^2\sigma_1^2}{n})$；同样 $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \cdots, m$，故 $\overline{Y} \sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{m})$，$b\overline{X} \sim N(b\mu_2, \dfrac{b^2\sigma_2^2}{n})$。因此 $a\overline{X} + b\overline{Y} \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, \dfrac{a^2\sigma_1^2}{n} + \dfrac{b^2\sigma_2^2}{m})$。

第7篇　参数估计

知识网格结构及知识点关联图



注：括号内的序号为对应知识点序号。

第 7 篇

综　　述

更多资源请扫二维码:

根据样本推断总体的分布或分布中的参数是数理统计中统计推断的核心内容之一。针对总体分布已知，但它的某些参数未知,利用样本及其观察值对此参数进行估计的问题称为参数估计问题。

参数估计主要包括点估计和区间估计。点估计是用统计量的观察值来估计参数的值，是单点估计。点估计方法包括矩估计法[(48)]和极大似然估计法[(49)]。矩估计法是用样本的各阶原点矩的函数来估计总体对应的同阶原点矩，由此得到关于未知参数的方程组，对此方程组求解得到参数的估计，由于估计时所采用的矩的阶数可能不同，所以矩估计的结果往往不唯一；极大似然估计法依据的是一个事件发生，取使得其发生的概率最大的情形作为估计的原理，具体操作是利用样本联合分布构造似然函数，求此似然函数达到极大值时参数的取值，该值称为极大似然估计值，极大似然估计法常常利用函数求驻点的方法求极值。由于一个参数可以给出不同的点估计，所以需运用概率理论对估计量进行评价[(50)]，常见的三个评价标准是：无偏性、有效性和一致性，重点是无偏性。点估计的主要缺点是不能反映出估计的精度，因此进一步引入参数的区间估计。区间估计是在点估计的基础上，根据置信水平并借助两个统计量的取值所形成的区间及来估计参数的值，其优点是置信度可控，缺点是区间估计的精度（区间长度）与置信度会相互制约。区间估计可直接用公式计算，也可按步骤推导出的置信区间公式计算。在具体解题时，要特别注意总体的条件，根据待估参数及总体的分布情况选择合适的统计量，利用该统计量给出参数的区间估计，本篇给出了一个正态总体[(51)] 及两个正态总体的区间估计[(52)]，具体应用时需特别注意不同条件下的区间估计公式。

注： 文字后面括号中的上标标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 48 矩估计法

更多资源请扫二维码:

48.1 概念、结论

1. 概念

定义 48.1.1 参数的点估计 设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式已知，其中 θ 是待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为未知参数 θ 的近似值，称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的估计量，称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的估计值。

定义 48.1.2 矩估计法 用样本矩作为相应总体矩的估计量，用样本矩的连续函数作为相应总体矩的连续函数的估计量，并依此求出总体未知参数的估计，这种构造估计量的方法称为矩估计法，相应的估计量的观察值称为矩估计值。

2. 结论

结论 48.1.1 矩估计法的原理是大数定律，即样本矩、样本矩的连续函数分别依概率收敛于相应的总体矩、总体矩的连续函数。

结论 48.1.2 矩估计法的用法：若总体中有 m 个参数，则通过各阶样本矩等于总体矩即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k = E(X^k)$，$k=1,2,\cdots,m$，构造方程组从中解出未知参数的矩估计量。

结论 48.1.3 由于矩估计法是利用样本矩等于总体矩进行计算，而对矩的阶数没有具体规定，可以通过样本任一一阶矩计算参数，甚至可以通过样本中心矩等于总体中心矩进行计算，因此矩估计法所求的矩估计量不是唯一的；但一般的约定是从低阶矩开始。

结论 48.1.4 矩估计法的关键：（1）计算 $E(X^k)$，计算方法类似于随机变量函数的数学期望的求法；（2）解方程组 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k = E(X^k), k=1,2,\cdots,m$，从中得到未知参数的表达式。

48.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 33，知识点 35，知识点 36
- **主要题型**：求参数的矩估计量或矩估计值。
- **综述**：矩估计法是在假设总体的 k 阶矩等于样本的 k 阶矩的前提下构造关于参数的方程组，由此求出参数。注意，这里的“假设”是一种人为的规定，它有概率理论的背景，但既然是估计，就会存在误差。解题的关键在于对总体 k 阶矩的计算。

48.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 49.3.1，　例 49.3.6

例 48.3.1（难度系数 0.2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出的样本，要求估计 μ 和 σ^2。

解析：本题考查矩估计法的应用。

解：已知 $\mu = E(X)$，$\sigma^2 = D(X) = E(X^2) - E^2(X)$，因此可用样本一阶原点矩和二阶原点矩去作估计。所以

$$\hat{\mu} = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$。

例 48.3.2（难度系数 0.4）已知总体 X 在 $[\theta_1, \theta_2]$ 上服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自 X 的样本，求 θ_1、θ_2 的矩估计量和极大似然估计量。

解析：本题考查矩估计及极大似然估计的求解方法。

解：因总体 X 在 $[\theta_1, \theta_2]$ 上服从均匀分布，则 $E(X) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$，$D(X) = \dfrac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$。

先求矩估计，令　$\mu_1 = E(X) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$，

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} + \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4} = \frac{\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{3},$$

解方程组

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \\ \mu_2 = \dfrac{\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{3}, \end{cases}$$

得 $\theta_1 = \mu_1 \pm \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)}$，$\theta_2 = \mu_1 \mp \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)}$。注意到 $\theta_1 < \theta_2$，因此得 θ_1、θ_2 的矩估计为 $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \sqrt{3}S^*$，$\hat{\theta}_2 = \overline{X} + \sqrt{3}S^*$。其中 $S^{*2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$。

再求极大似然估计。极大似然函数为：

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}，\ \theta_1 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant \theta_2。$$

上面的函数没有驻点，因此直接由极大似然估计的思想知，θ_1、θ_2 的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}_1 = \min(X_1,\cdots,X_n) = X_{(1)}，\ \hat{\theta}_2 = \max(X_1,\cdots,X_n) = X_{(n)}。$$

招数 48.3.1　绝招：矩估计是通过总体 k 阶矩等于样本 k 阶矩转化为方程组求解，极大似然估计是用转化为似然函数求极大值的方法求解。

例 48.3.3（难度系数 0.6）　设箱中有 100 个球，其中只有红色和白色两种球，现从箱中有放回地每次抽出一球，共取 8 次。如出现红球记为 1，出现白球记为 0，得数据 1，0，1，1，0，1，1，1，试用矩估计法估计红球的个数 r。

解析：本题为有放回取样，抽球 8 次，相当于作 $n=8$ 的独立重复试验，设每次抽出的红球个数为 X 个，其可能取值为 0，1，则 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，其中 p 为每次抽到红球的概率，且 $p = \dfrac{r}{100}$，因此只要估计出 p，即可得 r 的估计值。

解：由 0-1 分布的概念可知，$E(X) = p$，而 $\overline{X} = \dfrac{1}{8}(1+0+1+1+0+1+1+1) = \dfrac{3}{4}$，所以 p 的矩估计值为 $\hat{p} = \dfrac{3}{4}$；由 $p = \dfrac{r}{100}$，故红球的矩估计值为 $\hat{r} = \dfrac{3\times 100}{4} = 75$ 个。

例 48.3.4（难度系数 0.6，2002 年考研数学一真题）　设总体 X 的分布律为

Y	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\dfrac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

解析：本题考查点估计中的矩估计法和极大似然估计法。具体计算时可先求估计量再代入观察值计算估计值，或者在计算过程中直接代入。注意两种估计的结果可能相同也可能不同，本体的结果不同。

解：总体的数学期望为

$$E(X) = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta) = 3-4\theta,$$

样本均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2\text{。}$$

令 $E(X)=\bar{x}$，即 $3-4\theta=2$，解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$。

根据给定的样本值，可构造样本的似然函数为 $L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$，取对数得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

最后求导得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}\text{。}$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta_1=\frac{7+\sqrt{13}}{12}$，$\theta_2=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$。因为 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$，不合题意，所以 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$。

例 48.3.5 （难度系数 0.6，跨知识点 50，2007 年考研数学一、三真题） 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中参数 θ（0＜θ＜1）未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值。(1)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由。

解析：本题考查参数的矩估计法与估计量的无偏性判断。

解：（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_\theta^1\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$。令 $\overline{X}=E(X)$，即 $\overline{X}=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$。

（2）因为

$$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}=4[\frac{1}{n}D(X)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta)^2]$$

$$=\frac{4}{n}D(X)+\frac{1}{4}+\theta+\theta^2,$$

又 $\theta>0$ 且 $D(X)>0$，所以 $E(4\overline{X}^2)>\theta^2$，即 $E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2$，因此 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

知识点 49　极大似然估计法

更多资源请扫二维码:

49.1　概念、结论

1．概念

定义 49.1.1　极大似然估计法　在参数的点估计中，若已观察到样本的样本值，可借助样本函数，使得当未知参数取某统计量时，所观测到的样本取得该观察值的概率为最大，则称该统计量为极大似然估计量。将样本值代入该统计量所得的值称为极大似然估计值。

2．结论

结论 49.1.1　极大似然估计法的一般步骤如下：

（1）构造似然函数

$$L(\theta)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}\text{（离散型）};$$

$$L(\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)\text{（连续型）}。$$

（2）取对数 $\ln L(\theta)$（若似然函数比较简单，则此步骤可省略）。

（3）求出 $\ln L(\theta)$（即 $L(\theta)$）的极大值点 $\theta=\hat{\theta}$，一般通过求驻点即可求出，但若驻点不存在或似然函数无解，则应由定义或用其他的方法找 $\theta=\hat{\theta}$，使似然函数达到极大值。

（4）θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}$。

结论 49.1.2　极大似然估计具有不变性：设 $\hat{\theta}$ 是总体 X 中的未知参数 θ 的极大似然估计，θ 的函数 $u=u(\theta)$ 具有单值反函数，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计。

49.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：5
- **最关联知识点**：知识点 14，知识点 18
- **主要题型**：求参数的极大似然估计量和估计值。
- **综述**：按极大似然估计法的规定步骤估计参数时，注意求解过程的完整性。特别注意构造似然函数对其求导得驻点求极大值时，可利用对数求导法，但若似然函数无驻点，要根据似然函数的特点，借助样本的取值，另寻得似然函数得到最大值的方法。

49.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：例 48.3.4，　例 48.3.5

例 49.3.1（难度系数 0.6）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$，其中 $\theta>-1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解析：利用总体的概率密度可同时求随机变量的矩估计量和极大似然估计量，在求极大似然估计量时常用对数求导法以简化运算，通过求驻点计算极大似然估计量。

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，令 $\overline{X}=E(X)$，即 $\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，解得 $\theta=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$。

（2）当 $0<x_i<1$ 时，似然函数为

$$L(\theta)=(\theta+1)x_1^{\theta}(\theta+1)x_2^{\theta}\cdots(\theta+1)x_n^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}\text{。}$$

两边取对数，得 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$，对 θ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\text{，}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$，故 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

例 49.3.2（难度系数 0.6）设 $X\sim b(m,p)$，m 已知，$0<p<1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，求 p 的最大似然估计量。

解析：首先利用分布律构造似然函数，然后对似然函数采用对数求导法，确定极大似然估计量。注意解题的书写过程。

解：根据已知得 X 的分布律为 $P\{X=x\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k}$，$k=0,1,\cdots,m$，故样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数为

$$L(p)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i},$$

上式两边取对数得

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\ln C_m^{x_i},$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p}-\dfrac{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$，解得 $p=\dfrac{1}{nm}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{\overline{x}}{m}$。

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\ln L(p)=-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\dfrac{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0$，故 p 的极大似然估计值为

$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\overline{x}}{m}$。

所求 p 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{\overline{X}}{m}$。

例 49.3.3 （难度系数 0.6） 设总体 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，求 a、b 的极大似然估计值。

解析：利用概率密度函数构造似然函数，然后通过求驻点确定极大似然估计量，但若似然函数是单调函数，则无驻点。这种情况下，可根据已知条件直接给出极大似然估计量。

解：根据已知可得总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

当 $a<x_i<b$ 时，似然函数为 $L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}$，要使 $L(a,b)$ 达到最大值，只要 $b-a$ 取最小值，显然此似然函数无驻点。根据 $a\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant b$，可得 a 的极大似然估计为 $\hat{a}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$b$ 的极大似然估计为 $\hat{b}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

例 49.3.4（难度系数 0.8，2004 年考研数学一真题） 设总体 X 的分布函数为 $F(x,\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$，其中未知参数 $\beta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试分别求 β 的矩估计量和极大似然估计量。

解析：本题考查未知参数的两种点估计方法，先根据总体的分布函数求概率密度函数，再分别按照矩估计和极大似然估计的常规方法求解。

解：（1） X 的概率密度函数为 $f(x,\beta)=\frac{\mathrm{d}F(x,\beta)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$，则

$$E(X)=\int_1^{+\infty}x\beta x^{-\beta-1}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{1-\beta}，令 E(X)=\frac{\beta}{1-\beta}=\overline{X},$$

可得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{1+\overline{X}}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

（2）当 $x_i>1$ 时，似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots x_n,\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\beta x_i^{-\beta-1}$，则对数似然函数为 $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$。

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=0$，即 $\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，所以 β 的极大似然估计量为 $\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

例 49.3.5（难度系数 0.4，2009 年考研数学一真题） 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中参数 $\lambda\,(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。求：（1）参数λ的矩估计量；（2）参数λ的极大似然估计量。

解析：本题考查参数估计中的矩估计法和极大似然估计法。

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\lambda}$。令 $\overline{X}=E(X)$，即 $\overline{X}=\dfrac{2}{\lambda}$，得λ的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{X}$。

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则当 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

两边取对数得

$$\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，得$\lambda$的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$。

例 49.3.6（难度系数 0.6，2015 年考研数学一真题） 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本。求：（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的极大似然估计量。

解析：利用概率密度函数可求参数的矩估计量和极大似然估计量，在求极大似然估计量时，要结合似然函数的单调性。

解：（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{1}x\cdot\dfrac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{1+\theta}{2}$，令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$ 为 θ 的矩估计量，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$。

（2）当 $\theta\leqslant x_i\leqslant 1$ 时，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n,$$

由于 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{1-\theta}>0$，说明似然函数是关于 θ 是单调增加函数，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n\geqslant\theta$，所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的极大似然估计量。

知识点 50　点估计的评价标准

更多资源请扫二维码:

50.1　概念、结论

1．概念

定义 50.1.1　无偏性　设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若对于任意的 θ，均有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

定义 50.1.2 有效性　设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是未知参数 θ 的两个无偏估计量，若对于任意的 θ，均有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，且至少有一个 θ 使上式的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

定义 50.1.3 相合性　设 $\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，若对于任意 θ 满足：对于任意的正数 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$，则称 $\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的相合估计量（或一致估计量）。

2．结论

结论 50.1.1　样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的无偏、一致估计量，且是 μ 的所有线性无偏估计 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_iX_i$ (其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=1$) 中方差最小的；样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏、一致估计量。

结论 50.1.2　设 $\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，若（1）$\lim\limits_{n\to\infty}E[\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\theta$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}D[\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=0$，则 $\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的相合（一致）估计量。

结论 50.1.3　样本原点矩 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 是相应总体原点矩 $E(X^k)$ 的无偏、一致估计量；样本矩的连续函数是相应总体矩相同连续函数的一致估计量，但不一定是无偏估计量。

50.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 33，知识点 35

● **主要题型：**（1）判断统计量的无偏性及有效性；（2）验证统计量是参数的相合估计。

● **综述：** 针对验证某统计量是否是参数的无偏估计，或在无偏的基础上判断数个统计量中哪一个更有效的题型，实际上是求统计量的数字特征，如数学期望或方差，在求解中可直接计算，也可利用数字特征的性质或常见随机变量的数字特征给出结果。针对统计量是否是参数的相合估计题型，可按定义验证，但更常见的是利用结论 50.1.2 来处理。

50.3　经典例题精解巧析

例 50.3.1（难度系数 0.4）证明：样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计。

解析：先对样本方差 S^2 的表达式进行展开并化简，再利用相关数字特征的性质计算其数学期望；在计算过程中注意样本中的个体是相互独立且同分布。

证明：设总体分布的数学期望为 μ，方差为 σ^2，且

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2。$$

而 $E(X_i^2)=D(X_i)+E^2(X_i)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2+\mu^2$，$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+E^2(\overline{X})$。

由于 $D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot nD(X)=\frac{1}{n}\sigma^2$，所以 $E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2$。

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\overline{X}^2)$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[E(X^2)-E(\overline{X}^2)\right]=\frac{n}{n-1}\left[\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2\right]=\sigma^2，$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计。

注意：二阶样本中心矩 $B_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 方差 σ^2 的矩估计和极大似然估计。但它却不是 σ^2 的无偏估计，因为

$$E(B_2)=\frac{n-1}{n}E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2。$$

例 50.3.2（难度系数 0.6）设从均值为 μ、方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1、n_2 的两个简单随机样本。$\bar{X}_1$、$\bar{X}_2$ 分别为两个样本的均值。证明：（1）对于任意常数 a、$b(a+b=1)$，$Y=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$ 是 μ 的无偏估计；（2）确定常数 a、b，使 $D(Y)$ 最小。

解析：（1）本题考查无偏估计的概念；（2）欲使 $D(Y)$ 最小，需对变量求导求驻点，即可确定常数 a、b。

证明：根据已知条件及数学期望的性质可得

（1）$E(Y)=E(a\bar{X}_1+b\bar{X}_2)=aE(\bar{X}_1)+bE(\bar{X}_2)=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$，故 $Y=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$

是 μ 的无偏估计。

（2） $D(Y)=D(a\bar{X}_1+b\bar{X}_2)=a^2D(\bar{X}_1)+b^2D(\bar{X}_2)=a^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}+b^2\dfrac{\sigma^2}{n_2}=[\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}]\sigma^2$ 。

令 $\dfrac{\mathrm{d}DY}{\mathrm{d}a}=\left[\dfrac{2a}{n_1}-\dfrac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2=0$ ，解得 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ ，则 $b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 。故当 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ ，$b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 时 $D(Y)$ 最小。

例 50.3.3（难度系数 0.6）设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知，设 $T_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{3}(X_3+X_4)$ ，$T_2=\dfrac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5}$ ，$T_3=\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$ 为 θ 的 3 个不同的估计量。（1）指出 T_1、T_2、T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量；（2）在上述 θ 的无偏估计量中指出哪一个较为有效。

解析：通过计算估计量 T_1、T_2、T_3 的数学期望和方差，结合估计的无偏性和有效性给出相应结论。

解：（1）由于 X_1,X_2,X_3,X_4 服从均值为 θ 的指数分布，所以

$$E(X_i)=\theta，\quad D(X_i)=\theta^2，\quad i=1,2,3,4 。$$

因此

$$E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\theta，$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=2\theta，$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)]=\theta，$$

即 T_1、T_3 是 θ 的无偏估计量。

（2）由方差的性质，并注意到 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，知

$$D(T_1)=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[D(X_3)+D(X_4)]=\frac{5}{18}\theta^2，$$

$$D(T_3)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]=\frac{1}{4}\theta^2 。$$

因为 $D(T_1)>D(T_3)$，所以 T_3 比 T_1 更为有效。

注意：有效性必须在无偏估计的基础上讨论。

例 50.3.4（难度系数 0.8） 设总体 X 的分布律为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1-\theta & \theta-\theta^2 & \theta^2\end{pmatrix}$，其中 $\theta\in(0,1)$ 未知，用 N_i 表示来自总体的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中等于 i $(i=1,2,3)$ 的个数，试求一组常数 a_1,a_2,a_3 ，使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为参数 θ 的无偏估计，并求在此估计下 T 的方差。

解析：本题考查统计量数字特征的计算，关键在于了解随机变量 N_i 所服从的分布，

再利用其数字特征进行计算。

解：由题设，$N_1 \sim b(n,1-\theta)$，$N_2 \sim b(n,\theta-\theta^2)$，$N_3 \sim b(n,\theta^2)$，且 $N_1+N_2+N_3=n$。要使

$$E(T)=\sum_{i=1}^{3}a_iE(N_i)=na_1(1-\theta)+na_2(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2$$
$$=na_1+(-na_1+na_2)\theta+(-na_2+na_3)\theta^2=\theta,$$

只要 $na_1=0$，$-na_1+na_2=1$，$-na_2+na_3=0$，解得 $a_1=0$，$a_2=\frac{1}{n}$，$a_3=\frac{1}{n}$。此时有 $T=\frac{1}{n}N_2+\frac{1}{n}N_3=\frac{1}{n}(n-N_1)$，并且

$$D(T)=\frac{1}{n^2}D(n-N_1)=\frac{1}{n^2}D(N_1)=\frac{1}{n^2}n(1-\theta)\theta=\frac{1}{n}(1-\theta)\theta 。$$

例 50.3.5（难度系数 0.4）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，试证明 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的相合估计量。

解析：本题利用概念说明 S^2 是 σ^2 的相合估计量，采用切比雪夫不等式或大数定理证明。

证明：由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以有

$$E(S^2)=E(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n-1})=\frac{\sigma^2(n-1)}{n-1}=\sigma^2,$$
$$D(S^2)=D(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1))=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}。$$

根据切比雪夫不等式有 $P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}>1-\frac{D(S^2)}{\varepsilon^2}=1-\frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|S^2-\sigma^2|<\varepsilon)=1$。所以 S^2 是 σ^2 的相合估计量。

例 50.3.6（难度系数 1.0，跨知识点 33、35、49，2014 年考研数学一真题）设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，其中 θ 是未知参数且大于零。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。（1）求 $E(X)$、$E(X^2)$；（2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；（3）是否存在实数 a，使得对任意 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$？

解析：本题考查数学期望和极大似然估计量的计算方法。要说明某估计量是相合估计量，常用结论 50.1.2 处理。

解：根据已知条件得 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=F'(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2x\mathrm{d}x]=\theta\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta。$$

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x;\theta)==\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2x_i}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, & x_i>0,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

当 $x_i>0\ (i=1,\cdots,n)$ 时， $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2x_i}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$，两边取对数得

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln 2x_i-\ln\theta-\frac{x_i^2}{\theta}],\quad \frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i^2}{\theta^2}]=\frac{1}{\theta^2}[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\theta]=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 。

（3）下面计算 $\hat{\theta}_n$ 的数学期望和方差。

$$E(\hat{\theta}_n)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=E(X^2)=\theta,\quad D(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}D(X^2)=\frac{1}{n}[E(X^4)-E^2(X^2)],$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^4\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^4\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}=-\left[x^4\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 4x^3\mathrm{d}x\right]$$

$$=4\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=-2\theta\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}=-2\theta\left[x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2x\mathrm{d}x\right]$$

$$=4\theta\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=-2\theta^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}(-\frac{x^2}{\theta})=2\theta^2。$$

$D(\hat{\theta}_n)=\dfrac{1}{n}[2\theta^2-\theta^2]=\dfrac{\theta^2}{n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}D(\hat{\theta}_n)=0$， $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量，故只需取 $a=\theta$，即可使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$ 。

知识点 51　一个正态总体均值与方差的置信区间

更多资源请扫二维码:

51.1　概念、结论

1．概念

定义 51.1.1 置信区间　设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式已知，其中 θ 是待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，对于给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，使得对于任意的 θ 有

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}\geqslant 1-\alpha,$$

那么称随机区间 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信下限和上限，$1-\alpha$ 称为该区间的置信水平。

2．结论

结论 51.1.1　置信水平 $1-\alpha$ 可反映出区间估计的可靠性，越大越好；置信区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 反映区间估计的精确度，越小越好。显然可靠性与精确度是一对矛盾，在实际问题中求置信区间的原则：对于给定的置信水平 $1-\alpha$，使置信区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 越小越好。

结论 51.1.2　一个正态总体参数的置信区间：设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一组样本，其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，置信水平为 $1-\alpha$，则:

（1）σ^2 已知，μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$；

（2）σ^2 未知，μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$；

（3）μ 已知，σ^2 的置信区间为$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$；

（4）μ 未知，σ^2 的置信区间为$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$，其中分位数均为上分位数。

51.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 21，知识点 45，知识点 46
- **主要题型**：（1）正态总体的均值或方差的置信区间；（2）已知置信区间长度，求样本容量。
- **综述**：对正态总体的均值及方差的置信区间的估计问题，首先要清楚已知条件（如方差已知还是未知），因为不同条件下的置信区间公式是有差异的，再根据公式查表并计算相关值来得到置信区间，特别注意上α分位数的规定（不同教课书的定义有一定的差异）；若已知置信区间求样本容量，则只需按上述方法给出置信区间，并计算区间长度，根据题目要求给出样本容量的大小即可。

51.3　经典例题精解巧析

跨知识点例题索引：　例 53.3.4

例 51.3.1（难度系数 0.4）　设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（单位：h）分别为 6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0。设干燥时间的总体服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求在以下条件下μ的置信水平为 0.95 的置信区间：（1）若由以往经验知$\sigma=0.6$（小时）；（2）方差σ^2未知。

解析：这是求正态总体在σ^2已知或未知的条件下求μ的置信区间，套用公式计算即可。

解：（1）由于μ、σ^2均未知，故选随机变量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，代入样本值计算得$\overline{x}=6.0$，$s^2=\dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2=0.33$；由$n=9$，查 t 分布表得$t_{0.025}(8)=2.06$；由$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{0.025}(8)\right\}=0.95$，得$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{0.025}(8)\frac{s}{\sqrt{9}}, \overline{x}+t_{0.025}(8)\frac{s}{\sqrt{9}}\right)=(5.56,6.64)\text{。}$$

（2）正态总体在σ^2已知的条件下μ的置信水平为 0.95 的置信区间为（$\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$），代入样本值计算得$\bar{x}=6.0$，查表得$\mu_{0.025}=1.96$，$\sigma=0.6$；代入计算得$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间为$(6.0\pm\frac{0.6}{\sqrt{9}}\times1.96)=(5.608,6.392)$。

招数 51.3.1　无招胜有招：选择置信区间公式的关键是“三看”，一看参数，二看条件，三看区间类型。

例 51.3.2（难度系数 0.6）随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差为$s=11\,(m/s)$。设炮口速度服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的标准差σ的置信水平为 0.95 的置信区间。

解析：利用正态总体在μ未知的条件下关于标准差的置信区间的计算公式。

解：根据题意知$\alpha=0.05$，$n=9$；查表知$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$

根据正态总体在μ未知条件下的标准差的置信区间公式，可得σ的置信水平为 0.95 的置信区间为$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{17.535}},\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{2.18}}\right)=(7.4,21.1)$。

例 51.3.3（难度系数 0.6）总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，问需抽取容量n多大的样本，才能使μ的置信水平为$1-\alpha$，且置信区间的长度不大于L？

解析：利用正态总体在σ^2已知的条件下关于μ的置信区间公式计算置信区间的长度，利用该长度不大于L确定样本容量。

解：由σ^2已知，可知μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{x}\pm u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，于是置信区间的长度为$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$，要求$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\leqslant L$，则$n\geqslant\frac{4\sigma^2(u_{\alpha/2})^2}{L^2}$。

例 51.3.4（难度系数 0.8）设大学生男生身高的总体$X\sim N(\mu,16)$（单位：cm），若要使其平均身高置信水平为 0.95 的置信区间长度小于 1.2，问至少应抽查多少名学生的身高？

解析：本题是在方差已知的条件下，求均值的置信区间问题，根据问题确定置信区间，由给定的置信区间长度确定样本容量 n。

解：该总体服从正态分布，且方差$\sigma^2=16$，则应选统计量为$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。

已知$1-\alpha=0.95$，查表得$u_{0.025}=1.96$，故由$P\{|U|<u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$，得平均身高的置信水平为 0.95 的置信区间为$\left(\bar{x}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$。

因为置信区间长度$L=2u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，而题目要求$L<1.2$，即$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<1.2$，所以

$n \geqslant (\dfrac{2\times 1.96\times \sigma}{1.2})^2=171$，故至少应抽查 171 名男生的身高。

例 51.3.5 （难度系数 0.6，跨知识点 34，2000 年考研数学三真题）设 0.50，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $Y=\ln X$ 服从 $N(\mu,1)$，求：（1）$E(X)$（记作 b）；（2）μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；（3）b 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解析： 按随机变量函数的数学期望公式计算 X 的数学期望，再利用 X 的样本值求 $Y=\ln X$ 的样本值，最后根据 μ 的置信区间求 $b=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}$ 的置信区间。

解：（1）根据已知，Y 的概率密度 $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$，由 $Y=\ln X$，得 $X=\mathrm{e}^Y$，

$$E(X)=E(\mathrm{e}^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y f(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\mathrm{d}y\overset{t=y-\mu}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{t+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-1)^2}{2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\text{。}$$

（2）首先根据样本值有 $\bar{y}=\dfrac{1}{4}(\ln 0.50+\ln 1.25+\ln 1.25+\ln 2.00)=0$，$\mu$ 的置信水平为 0.95 的置信区间两个端点为

$$\bar{y}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0\pm\frac{1}{2}u_{0.025}=\pm\frac{1}{2}\times 1.96=\pm 0.98\text{，}$$

故 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是 $(-0.98,0.98)$。

（3）由于 $-0.98<\mu<0.98\Leftrightarrow -0.48<\mu+\dfrac{1}{2}<1.48\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0.48}<\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}<\mathrm{e}^{1.48}$，故 $b=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间是 $(\mathrm{e}^{-0.48}, \mathrm{e}^{1.48})$。

知识点 52　两个正态总体均值差与方差比的置信区间

更多资源请扫二维码:

52.1　结论

结论 52.1.1　两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 均值差与方差比的置信区间：

（1）σ_1^2、σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$；

（2）σ_1^2、σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right);$$

（3）μ_1、μ_2 未知，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$。

其中置信水平为 $1-\alpha$，分位数均为上侧分位数。

52.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频：** 1
- **最关联知识点：** 知识点 21，知识点 45，知识点 47
- **主要题型：**（1）在方差相等的条件下，求两正态总体均值之差的置信区间；（2）在均值未知的条件下，两个正态总体方差之比的置信区间。
- **综述：** 根据条件正确地选择置信区间的公式，查表得上分位数，代入计算即可得置信区间。

52.3　经典例题精解巧析

例 52.3.1（难度系数 0.6）　对某农作物的两个品种统计 8 个地区的单位面积产量如下。

品种 A：86，87，56，93，84，93，75，79；

品种 B：80，79，58，91，77，82，74，66。

假定两个品种的单位面积产量均服从正态分布，且方差相等，试求平均单位面积产量之差在置信水平为 0.95 下的置信区间。

解析： 已知两个正态总体的方差未知，但方差相等的情况下，利用它们的均值之差的置信区间公式进行计算。

解： 此题是在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的条件下求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间。

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}),$$

代入已知量计算得

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}X_i=81.625,\ S_1^2=\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{8}X_i^2-8\times(81.625)^2)=145.60,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}Y_i=75.875,\ S_2^2=\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{8}Y_i^2-8\times(75.875)^2)=102.13,$$

$$s_w=\sqrt{\frac{(8-1)\times145.60+(8-1)\times102.13}{14}}=11.129,\ \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=0.05,\ t_{0.025}(14)=2.1448。$$

所以 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 下的置信区间为

$$(81.625-75.875-2.1448\times11.129\times\frac{1}{2},\ 81.625-75.875+2.1448\times11.129\times\frac{1}{2})$$
$$=(-6.185,\ 17.685)\ 。$$

注：该类题目属于套用公式的题型，在清楚各类公式的基础上，根据题目条件选取适合的公式，查找或计算相关数值，最后代入公式计算。

例 52.3.2（难度系数 0.8） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1,20)$ 的简单随机样本，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_2,25)$ 的简单随机样本，要使 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%置信区间的长度不超过 h，问 n 至少要取多大？

解析：已知两个正态总体的方差，利用它们的均值之差的置信区间公式得到区间的长度，再根据题目要求确定结果。

解：因方差已知，$\sigma_1=20$，$\sigma_2=25$，$\alpha=0.05$，$u_{0.025}=1.96$，故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{20}{2n}+\frac{25}{n}}\right),$$

置信区间的长度为 $l=2u_{0.025}\sqrt{\frac{20}{2n}+\frac{25}{n}}=\sqrt{\frac{35}{n}}\times3.92\leqslant h$，则 $n\geqslant\frac{537.82}{h^2}$。故 n 至少要取 $[\frac{537.82}{h^2}]+1$。

注意：样本容量为正整数。

例 52.3.3（难度系数 0.8） 工人和机器人独立操作在钢部件上钻孔，钻孔深度分别为正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两样本独立，今测得部分钻孔深度（单位：cm）如下

工人操作：	4.02	3.94	4.03	4.02	3.95	4.06	4.00	
机器人操作：	4.01	4.03	4.02	4.01	4.00	3.99	4.02	4.00

试求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间。

解析：这是在两个正态总体均值未知的情况下，求方差比的置信区间，用公式计算。

解：由于 μ_1、μ_2 均未知，所以 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

由两样本观测值计算得 $n_1=7$，$s_1^2=0.0189$，$n_2=8$，$s_2^2=0.00017$，$\alpha=0.1$，查 F 分布的分位数表知 $F_{0.05}(6,7)=3.87$，$F_{0.95}(6,7)=\frac{1}{F_{0.05}(7,6)}=\frac{1}{4.21}=0.24$，故得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{0.0189}{0.00017}\times\frac{1}{3.87},\ \frac{0.0189}{0.00017}\times\frac{1}{0.24}\right)=(2.853,46.39)\text{。}$$

第 7 篇综合测试题

7.1　总体 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

的一组样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，试求参数 θ 的矩估计量。（知识点 48，难度系数 0. 4）

7.2　设总体 X 具有分布律：

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta\ (0<\theta<1)$ 为未知参数。已知取得了样本值 $X_1=1, X_2=2$， $X_3=1$，试求 θ 的矩估计值和极大似然估计值。（知识点 48，难度系数 0.6）

7.3　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}\quad \text{其中未知参数}\ \theta>0\text{。}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求：（1）θ 的矩估计；（2）θ 的极大似然估计。（知识点 48、49，难度系数 0.6）

7.4　设总体 X 的分布律为 $P\{X=1\}=p$， $P\{X=0\}=1-p$，其中 $0<p<\dfrac{1}{2}$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 p 的极大似然估计。（知识点 49，难度系数 0.6）

7.5　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & x\in(0,\theta),\\ 0, & x\notin(0,\theta)\text{。}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 和 $D(\hat{\theta})$。（知识点 49，难度系数 0.8）

7.6　设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}\quad\text{其中}\ \theta\ （0<\theta<1）\text{是未知参数。}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数。求 θ 的极大似然估计。（知识点 49，难度系数 0.6，2006 年考研数学一、三真题）

7.7 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta。\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

（2）求统计量 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

（3）如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性。（知识点 13、50，难度系数 0.8）

7.8 设总体 $X\sim U(0,\theta)$，X_1,X_2,X_3 是总体 X 的一个容量为 3 的样本，X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1, & x\geqslant\theta\\ \dfrac{x}{\theta}, & x\in(0,\theta)\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，试证：$\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$、$4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 都是 θ 的无偏估计，并比较它们哪个更有效。（知识点 34、35、50，难度系数 0.8）

7.9 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，试证明 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 σ^2 的相合（一致）估计。（知识点 34、35、50，难度系数 0.6）

7.10 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $b(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 k=______。（知识点 50，难度系数 0.8，2009 年考研数学一真题）

7.11 某零件尺寸与规定尺寸的偏差 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今测得 10 个零件，得偏差值（单位：μm）2, 1, −2, 3, 2, 4, −2, 5, 3, 4，试分别求 μ、σ^2 的无偏估计值和置信水平为 0.90 的置信区间。（知识点 51，难度系数 0.6）

7.12 设某种砖头的抗压强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今随机抽取 20 块砖头，测得数据如下（单位：kg·cm kg/cm^2）：

64	69	49	92	55	97	41	84	88	99
84	66	100	98	72	74	87	84	48	81

（1）求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；（2）求 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。（知识点 51，难度系数 0.8）

7.13 随机抽查某校 400 名在校男大学生的身高，求得该 400 名同学的平均身高为 166（cm），假定由以往的经验知道此学校全体男大学生身高总体的方差为 16，则大学生的平均身高的置信水平为 0.99 的置信区间近似为多少？（知识点 51，难度系数 0.8）

7.14 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率。设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差的近似值均为 0.05 cm/s，取样本容量为 $n_1=n_2=20$；得燃烧率的样本均值分别为 $\overline{x_1}=18\mathrm{cm}/s$、$\overline{x_2}=24\mathrm{cm/s}$。设两样本相互独立，求两燃烧率总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.99 的置信区间。（知识点 52，难度系数 0.4）

7.15　设 A、B 两个地区种植同一型号的小麦。现抽取了 19 块面积相同的麦田，其中 9 块属于地区 A，另外 10 块属于地区 B，测得它们的小麦产量（单位：kg）分别如下。

地区 A：　100, 105, 110, 125, 110, 98, 105, 116, 112；

地区 B：　101, 100, 105, 115, 111, 107, 106, 121, 102, 92。

设地区 A 的小麦产量 $X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$，地区 B 的小麦产量 $Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1、μ_2、σ^2 均未知。试求这两个地区小麦的平均产量之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.90 的置信区间。（知识点 52，难度系数 0.6）

7.16　设 A 和 B 两批导线是用不同工艺生产的，今随机地从每批导线中抽取 5 根测量电阻，经计算得 $s_1^2=s_A^2=1.07\times10^{-7}$，$s_2^2=s_B^2=5.3\times10^{-6}$，若 A 批导线的电阻服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 分布，B 批导线的电阻服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 分布，求总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间。（知识点 52，难度系数 0.6）

第 7 篇综合测试题详解

7.1 解析：本题考查矩估计基本方法的应用。

解：由于 $E(X)=\dfrac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\theta^2}\left(\theta\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^\theta=\dfrac{\theta}{3}$，令 $E(X)=A_1=\overline{X}$，因此 $\dfrac{\theta}{3}=\overline{X}$，所以参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=3\overline{X}$。

7.2 解析：本题考查矩估计法及极大似然估计法的应用。

解：（1）求 θ 的矩估计值。

因为
$$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta,$$
且令 $E(X)=3-2\theta=\bar{X}$，则 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\bar{X}}{2}=\dfrac{3-\dfrac{1+2+1}{3}}{2}=\dfrac{5}{6}$。

（2）求 θ 的极大似然估计值。

构造似然函数为：
$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i=x_i\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$$
$$=\theta^2 2\theta(1-\theta)\theta^2=2\theta^5(1-\theta)。$$

两边取对数得
$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)。$$
再对上式求导得 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$，所以 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$。

7.3　解析：利用概率密度函数可求未知参数的矩估计和极大似然估计，在求极大似然估计时，要注意结合似然函数的单调性。

解：（1）根据已知可得：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\theta$，令$E(X)=\bar{X}=\frac{2}{3}\theta$，得$\hat{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}$为参数$\theta$的矩估计量。

（2）构造似然函数为：当$0<x_i<\theta$，$(i=1,2,\cdots,n)$时，

$$L(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}=\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i。$$

因为$L(\theta)$是θ的单调减函数，所以θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

7.4 解析：对具体问题求矩估计值和极大似然估计值，只需按照求矩估计量和极大似然估计量的方法，将具体的概率取值代入计算即可得所求值。

解：总体X的分布律为$b(1,p)$，即

$$P\{X=k\}=C_1^k p^k(1-p)^{1-k}=p^k(1-p)^{1-k}\quad(k=0,1)。$$

构造似然函数：

$$L(p)=p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

对其取对数得

$$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

再求导得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\frac{1}{p}+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\frac{-1}{1-p}=0,$$

即$(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(1-p)=p(n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)$，解得$p=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，故$p$的极大似然估计为$\hat{p}=\bar{X}$。

7.5 解析：利用概率密度可求随机变量的矩估计量；再利用总体的数学期望和方差，借助方差的运算性质可求矩估计量的方差。

解：（1）由于$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}x\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$，令$\bar{X}=E(X)$，即$\bar{X}=\frac{\theta}{2}$，解得$\theta=2\bar{X}$，故$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=2\bar{X}$。

（2）根据（1）可得

$$D\left(\hat{\theta}\right)=D(2\bar{X})=4D(\bar{X})=\frac{4D(X)}{n},$$

又

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}x^2\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10},$$

因此$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\theta^2}{20}$，故$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{4D(X)}{n}=\frac{\theta^2}{5n}$。

7.6 解析：本题主要考查极大似然估计法。由于本题的概率密度函数是分段函数，且非零的部分分为两段，所以必须对样本作分类处理，由此确定似然函数，再求极大似然估计量。

解：首先对样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按照大于等于 1 或小于 1 分成两类，不妨设

$$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_N^*<1，$$
$$x_{N+1}^*,x_{N+2}^*,\cdots,x_N^*\geqslant 1。$$

构造似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^N(1-\theta)^{n-N}，& x_1^*,x_2^*,\cdots,x_N^*<1，x_{N+1}^*,x_{N+2}^*,\cdots,x_N^*\geqslant 1，\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

此时有

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)，$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，即 $\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}=0$ ，解得 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$ 为 θ 的极大似然估计量。

7.7　解析：已知概率密度函数可通过积分求分布函数，注意分段函数的定限；再利用总体的分布函数可求最小值函数的分布函数；最后通过求最小值函数的概率密度给出估计量的数学期望，由此判断 $\hat{\theta}$ 是否具有无偏性。

解：（1）总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_\theta^x 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}x, x>\theta, \\ 0, & x\leqslant\theta。\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}，& x>\theta，\\ 0, & x\leqslant\theta。\end{cases}$$

（2）$\hat{\theta}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{\hat{\theta}}(x)&=P\left\{\hat{\theta}\leqslant x\right\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x\}\\ &=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}\\ &=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}，& x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta。\end{cases}\end{aligned}$$

（3）对 $F_{\hat{\theta}}(x)$ 求导得 $\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2n\,\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}，& x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta。\end{cases}$ 因此

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_\theta^{+\infty}x2n\,\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta，$$

故 $\hat{\theta}$ 不具有无偏性。

7.8　解析：要讨论无偏性和有效性，就要计算估计量的数学期望和方差，这就必须知道它们的概率密度函数。对极大、极小值分布，必须先求分布函数。

证明：设 $\hat{\theta}_1=\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i=\dfrac{4}{3}M$ ，$\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i=4N$ ，其中 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i, N=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 。

由于已知 $F(x;\theta)=\begin{cases}1, & x\geqslant\theta\\ \dfrac{x}{\theta}, & x\in(0,\theta)\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，所以统计量 M 的分布函数为

$$F_M(x)=[F(x;\theta)]^3=\begin{cases}1, & x\geqslant\theta,\\ (\dfrac{x}{\theta})^3, & x\in(0,\theta),\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

而统计量 N 的分布函数为

$$F_N(x)=1-(1-F(x;\theta))^3=\begin{cases}1, & x\geqslant\theta,\\ 1-(1-\dfrac{x}{\theta})^3, & x\in(0,\theta),\\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

从而 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$，$N=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 的概率密度分别为

$$f_M(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & x\in(0,\theta),\\ 0, & 其他。\end{cases}\qquad f_N(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}(1-\dfrac{x}{\theta})^2, & x\in(0,\theta),\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

故 M 与 N 的数学期望分别为

$$E(M)=\int_0^\theta x\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\theta，\quad E(N)=\int_0^\theta\frac{3x}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\theta。$$

因此 $E(\hat{\theta}_1)=E(\frac{4}{3}M)=\theta$。　$E(\hat{\theta}_2)=E(4N)=\theta$，这说明 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计。

因为

$$D(M)=E(M^2)-E^2(M)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x-(\frac{3}{4}\theta)^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

$$D(N)=E(N^2)-E^2(N)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{3}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2\mathrm{d}x-(\frac{\theta}{4})^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

所以

$$D(\hat{\theta}_1)=D(\frac{4}{3}M)=\frac{16}{9}D(M)=\frac{16}{9}\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{1}{15}\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta}_2)=D(4N)=16D(N)=16\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{3}{5}\theta^2。$$

由于 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，所以 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

7.9 解析：要说明某统计量是相合估计量，常用方法是先求统计量的数学期望和方差，再采用切比雪夫不等式或大数定理说明。

证明：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum\limits_{i=1}^n X_i^2-n\overline{X}^2\right]$。

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 也相互独立同分布，由大数定理，对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - E(X^2)\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0,$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $\mu_2 = E(X^2)$，而 $\bar{X}$ 依概率收敛于 $\mu_1 = E(X)$，由依概率收敛的性质知 $S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$ 依概率收敛于 $\mu_2 - \mu_1^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$，又由于 $\frac{n}{n-1} \to 1$（当 $n \to \infty$ 时）而 $S^2 = \frac{n}{n-1} S^{*2}$，所以 S^2 依概率收敛于 σ^2，即证明 S^2 是 σ^2 的相合估计。

7.10 解析　本题考查参数估计中的无偏性。

解： 已知 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自总体 $b(n,p)$ 的一组样本，则 $E(X) = np$，$D(X) = np(1-p)$，因此 $E(\bar{X}) = np$，$E(S^2) = D(X) = np(1-p)$。

由于 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，所以 $E(\bar{X} + kS^2) = np^2$，即 $np + knp(1-p) = np^2$；解得 $k = -1$。

7.11 解析： 本题考查利用正态总体在 μ、σ^2 未知的条件下 μ、σ^2 的置信区间的计算公式。

解： 因为 μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，σ^2 的无偏估计为 S^2，所以 μ 的无偏估计为 $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 2$，$\sigma^2$ 的无偏估计为 $S^2 = \frac{1}{9}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 10\times 4\right] = 5.778$。

由于正态总体的 μ、σ^2 未知，故 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$(\bar{X} - t_{0.05}(9)\frac{S}{\sqrt{10}}, \bar{X} - t_{0.05}(9)\frac{S}{\sqrt{10}})$$

由条件知 $\bar{X} = 2,\ S = 2.404,\ t_{0.05}(9) = 1.8331\sqrt{10} = 3.1623$，所以 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$(2 - 1.8331\times\frac{2.404}{3.1623},\ 2 + 1.8331\times\frac{2.404}{3.1623}) = (0.6064,\ 3.3935)。$$

σ^2 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right),$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$，$\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$，所以 σ^2 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(\frac{52.002}{16.919} \quad \frac{52.002}{3.325}\right) = (3.075,\quad 15.6397)。$$

7.12 解析：本题考查正态总体在μ、σ^2未知的条件下求μ、σ^2置信区间的计算公式。

解：根据数据计算得$\bar{x}=76.6$，$s=18.14$；$\alpha=1-0.95=0.05$，$n=20$，查表知$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(19)=2.093$，

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(19)=32.852,\quad \chi^2_{0.975}(19)=8.907。$$

由于正态总体在μ、σ^2未知的条件下，所以：

（1）μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(76.6\pm\frac{18.14}{\sqrt{20}}\times 2.093\right)=(68.11,85.089)。$$

（2）σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{19}{32.852}\times 18.14^2,\frac{19}{8.907}\times 18.14^2\right)=(190.33,702.01)。$$

7.13 解析：对于样本容量足够大的总体，根据中心极限定理，均可认为其和的分布近似服从正态分布，再利用正态总体置信区间的公式确定题目中所求即可。

解：由于样本容量$n=400$足够大，故可认为和的分布近似为正态分布，依题知$n=400$，$\alpha=0.01$，$\bar{x}=166$，$\sigma=4$；由于方差已知，故利用随机变量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，得大学生的平均身高的置信水平为 0.99 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

查标准正态分布表得$u_{0.005}=2.57$，故所求置信区间为

$$(166-2.57\times\frac{4}{\sqrt{400}},166+2.57\times\frac{4}{\sqrt{400}})=(165.486,166.514)。$$

7.14 解析：已知两个正态总体的方差，求它们的均值差的置信区间。

解：由条件知，$n_1=n_2=20$，$\alpha=0.01$，$\sigma_1=\sigma_2=0.05$，$\overline{X_1}=18,\overline{X_2}=24$。

由于方差已知，所以$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 0.99 的置信区间为

$$(\overline{X_1}-\overline{X_2}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})=(18-24\pm 2.58\sqrt{\frac{0.05^2}{20}\times 2})=(-6.04,-5.96)。$$

7.15 解析：已知两个正态总体的方差未知，但方差相等，利用它们的均值之差的置信区间公式进行计算。

解：已知两个正态总体的方差未知，但方差相等，故它们的均值之差的置信区间的两个端点分别为$(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$。

由$\alpha=0.1$，$n_1=9$，$n_2=10$，查表得$t_{0.05}(17)=1.7396$，按已给数据计算得

$$\bar{x}=109,\ \bar{y}=106,\ s_1^2=550/8,\ s_2^2=606/9,\ s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=68,\ s_w=8.246。$$

于是置信下限为

$$(109-106)-1.7396\times 8.246\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=-3.59,$$

置信上限为 $(109-106)+1.7396\times 8.246\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=9.59$，故均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平 90%的置信区间为 $(-3.59,9.59)$。

7.16 解析：已知两个正态总体均值未知的情况下求方差比的置信区间。

解：由于两个正态总体均值未知，所以 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\quad \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\right),$$

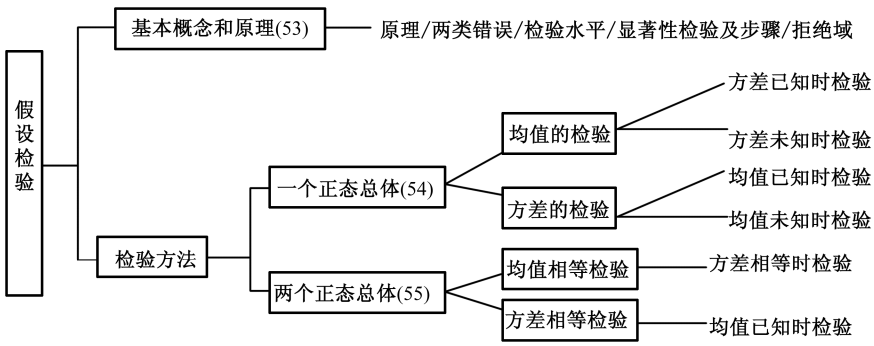
其中 $S_1^2=1.07\times 10^{-7}$，$S_2^2=5.3\times 10^{-6}$，$\alpha=0.10$，$F_{0.05}(4,4)=6.39$。

$$F_{0.95}(4,\ 4)=\frac{1}{F_{0.05}(4,\ 4)}=0.1565\ 。$$

所以 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平 0.90 的置信区间为 $\left(\frac{1.07/53}{6.39},\ \frac{1.07/53}{0.1565}\right)=(0.0032，0.1290)$ 。

第 8 篇　假设检验

知识网格结构及知识点关联图



第 8 篇

综　　述

更多资源请扫二维码:

假设检验是统计推断的另一个主要内容。假设检验是根据样本的信息，对未知总体的某些方面的假设作出合理的判断；假设检验根据所要检验的问题可区分为参数检验和非参数检验两大类，本篇仅讨论在一定条件下的参数检验问题。

假设检验[53]的具体做法是：首先对所讨论的问题提出原假设和备择假设，再根据已知总体的条件及所讨论的问题产生检验统计量，然后由检验统计量及控制显著性水平（即犯第一类错误的概率）给出检验的拒绝域，从而根据样本值计算检验统计量的值，最后根据其值是否落在拒绝域而做出拒绝或接受原假设的结论。假设检验的基本思想是小概率原理，即小概率事件在一次试验中几乎不会发生，那么假设一个事件发生，在此情况下计算样本值，若得到的概率很小，也就是说小概率事件竟然发生了，则可以认为假设条件是错误的，反之认为是正确的。针对参数的假设检验，本篇讨论两类问题：一个正态总体下的均值及方差的假设检验问题[54]及两个正态总体下的均值及方差是否相等的假设检验问题[55]。对这两类问题的讨论方法相同，不同的是统计量的选择。注意单侧检验与双侧检验的区别。

注： 文字后面括号中的标号指的是知识点的序号，大家可结合框图将知识点联系起来掌握知识，并根据自己实际情况，有计划地安排各知识点的练习。

知识点 53　假设检验的基本概念和原理

更多资源请扫二维码:

53.1　概念、结论

1．概念

定义 53.1.1　假设检验的基本概念　数理统计的基本任务是根据样本推断总体，假设检验是一种常用方法。假设检验是通过对总体提出某种关于总体分布或关于其参数的假设，然后抽取样本，构造合适的统计量，再根据抽样所得的样本及样本观察值，依据小概率事件原理，对假设作出接受该假设或者拒绝该假设的决定。

定义 53.1.2　假设检验的两类错误　由于小概率事件还是可能发生的，所以根据小概率事件原理作出的判断可能是错误的。若结果是事件 H_0 为真而拒绝 H_0，称为第一类（弃真）错误，犯第一类错误的概率记为 $P\left\{拒绝H_0 \middle| H_0为真\right\}=\alpha$，一般称为显著性水平；若结果是 H_0 假而接受 H_0，称为第二类（纳伪）错误，犯第二类错误的概率为 $P\left\{接受H_0 \middle| H_0为假\right\}=\beta$。

定义 53.1.3　显著性检验　对于给定的样本容量，只控制犯第一类错误的概率，而不考虑犯第二类错误的概率的检验法，称为显著性检验，犯第一类错误的概率 α 称为显著性水平。

2．结论

结论 53.1.2 假设检验的原理

根据实际问题提出的假设 H_0 称为原假设，其对立假设 H_1 称为备择假设。为了检验原假设 H_0，需先假定原假设 H_0 成立，如果抽样的结果导致小概率事件在一次试验中发生了，根据小概率事件原理，有理由怀疑 H_0 的正确性，从而拒绝 H_0，否则接受 H_0。

结论 53.1.1　假设检验的步骤

（1）根据实际问题提出原假设 H_0 和备择假设 H_1；

（2）在 H_0 成立的条件下，选择检验统计量 T，给出它的分布；

（3）根据给定的显著性水平 α，结合概率分布表，确定拒绝域 W；

（4）利用样本值计算统计量 T 的值 t，若 $t\in W$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0。

53.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：1
- **最关联知识点**：知识点 45
- **主要题型**：考查假设检验的基本概念。
- **综述**：关键要掌握假设检验的基本原理，理解第一类及第二类错误的概念，特别要理解清楚显著性检验及检验的具体步骤。

53.3　经典例题精解巧析

例 53.3.1 (难度系数 0.4) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为取自总体 $X\sim N(\mu,4^2)$ 的样本，对假设检验问题 $H_0:\mu=5,H_1:\mu\neq 5$，（1）在显著性水平 0.05 下求拒绝域；（2）若 μ=6，求上述检验所犯的第二类错误的概率 β。

解析：本题考查拒绝域和接受域的概念。

解：（1）由于方差已知，可取检验统计量为 $z=\dfrac{\overline{x}-5}{4/\sqrt{4}}$，检验的拒绝域为

$$|z|=\left|\frac{\overline{x}-5}{4/\sqrt{4}}\right|=\left|\frac{\overline{x}-5}{2}\right|\geqslant u_{0.025}=1.96;$$

（2）由（1）解得接受域为 $(5-2u_{0.025},5+2u_{0.025})=(1.08,8.92)$，当 $\mu=6$ 时，接受 H_0 的概率为 $\beta=P\{1.08<\overline{X}<8.92\}=\varPhi\left(\dfrac{8.92-6}{2}\right)-\varPhi\left(\dfrac{1.08-6}{2}\right)=0.921$。

招数 53.3.1　妙招：拒绝域的确定，一是根据检验参数和已知条件确定检验统计量；二是根据备择假设，借助检验统计量及分位数确定拒绝域。

例 53.3.2 （难度系数 0.6） 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{36}$ 是取自正态总体 $N(\mu,0.04)$ 的简单随机样本，原假设 H_0：$\mu=0.5$，备择假设 H_1：$\mu=\mu_1>0.5$，检验的显著性水平 $\alpha=0.05$，取拒绝域为 $\overline{X}>c$，则 $c=$____，若 $\mu_1=0.65$，则犯第二类错误的概率 $\beta=$____。

解析：本题考查在特定条件下的拒绝域求解方法以及第一类、第二类错误的概率计算方法。

（1）当 H_0 成立时，$\overline{X}\sim N(0.5,\dfrac{0.04}{36})$，根据条件

$\alpha=0.05=P\left\{\overline{X}>c\middle|H_0\right\}=1-\varPhi(\dfrac{c-0.5}{0.1/3})$，得 $\varPhi(\dfrac{c-0.5}{0.1/3})=0.95=\varPhi(1.645)$，即 $\dfrac{c-0.5}{0.1/3}=1.645$，解得 $c=0.5548$。

（2）当 $\mu_1=0.65$ 时，$\overline{X}\sim N(0.65,\dfrac{0.04}{36})$，其犯第二类错误的概率为

$$\beta=P\left\{\overline{X}\leqslant c\middle|H_1\right\}=\varPhi(\frac{0.5548-0.65}{0.1/3})=\varPhi(-2.856)=1-\varPhi(2.856)=0.0021。$$

解：0.5548；0.0021。

例 53.3.3 （难度系数 0.6） 设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，其中 $\sigma^2 > 0$ 为已知参数，而 μ 为未知参数，$-\infty < \mu < +\infty$。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本，假设为

$$H_0: \ \mu \geqslant \mu_0 \quad \left(H_1: \ \mu < \mu_0\right)$$

试对该假设，求显著性水平为 α 的显著性检验的拒绝域。

解析：本题考查在特定条件下的拒绝域求解方法。显著性检验拒绝域的确定是通过控制第一类错误（即弃真的错误）的概率而得。

解：取检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$，当原假设 H_0 成立，且 $\mu = \mu_0$ 时，

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(0, 1\right),$$

因此，取拒绝域 $W_1 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n): \ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_{1-\alpha} \right\}$，即当 $\mu = \mu_0$ 时，$P_{\mu_0}\left\{ (X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_1 \right\} = \alpha$。

当 $\mu > \mu_0$ 时，$T^* = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = T$，并且 $T^* = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(0, 1\right)$，因此 $P_\mu\left\{ (X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_1 \right\} = P_\mu\left\{ \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_{1-\alpha} \right\} \leqslant P_\mu\left\{ \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_{1-\alpha} \right\} = \alpha$，故该检验的拒绝域为 $W_1 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n): \ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_{1-\alpha} \right\}$。

例 53.3.4 （难度系数 0.6，跨知识点 50） 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，μ 未知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的样本观察值，已知 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为(4.71，5.69)，则取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，检验假设 H_0：$\mu = 5.0$，H_1：$\mu \neq 5.0$ 的结果是（ ）。

（A）不能确定 （B） 接受 H_0 （C）拒绝 H_0 （D） 条件不足无法检验

解析：本题考查置信区间及假设检验之间的关系。题目中方差已知但没有给出数值，同时样本均值及样本容量均未知，故可由置信区间推导出样本均值及 $u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 的值，再由上述值进行相关检验即可。

在 σ^2 已知的条件下，μ 的置信区间为 $\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = (4.71, 5.69)$，由此计算得 $\bar{x} = 5.2$，$u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.49$。针对检验假设 H_0：$\mu = 5.0, H_1$：$\mu \neq 5.0$，其检验统计量为 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{5.2 - 5}{0.49} \times u_{0.025} = \dfrac{20}{49} u_{0.025}$，而拒绝域 $|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}$，故未落入拒绝域，因而接受。应选（B）。

解：（B）。

注：在相同条件下置信区间与拒绝域的关系为：要检验 H_0：$\theta=\theta_0$，H_1：$\theta\neq\theta_0$，先求出 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$，然后考察区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是否包含 θ_0，若 $\theta_0\in(\underline{\theta},\overline{\theta})$，则接受 H_0；若 $\theta_0\notin(\underline{\theta},\overline{\theta})$，则拒绝 H_0。

知识点 54　一个正态总体均值与方差的假设检验

更多资源请扫二维码:

54.1　结论

一个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 参数的假设检验（以下显著性水平为 α，拒绝域均采用上 α 分位数）。

结论 54.1.1　σ^2 已知，关于 μ 的检验（u 检验）。

检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$，统计量可取为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}$；

检验假设 H_0：$\mu\geqslant\mu_0$，统计量可取为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $U<-u_\alpha$；

检验假设 H_0：$\mu\leqslant\mu_0$；统计量可取为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $U>u_\alpha$。

结论 54.1.2　σ^2 未知，关于 μ 的检验（t 检验）。

检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$，统计量可取为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；

检验假设 H_0：$\mu\geqslant\mu_0$，统计量可取为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $t<-t_\alpha(n-1)$；

检验假设 H_0：$\mu\leqslant\mu_0$，统计量可取为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $t>t_\alpha(n-1)$。

结论 54.1.3　μ 未知，关于 σ^2 的检验（χ^2 检验）。

检验假设 H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$，统计量可取为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，拒绝域为 $\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；

检验假设 H_0：$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$，统计量可取为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，拒绝域为 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$；

检验假设 H_0：$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，统计量可取为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　拒绝域为 $\chi^2 > \chi_\alpha^2(n-1)$。

54.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：3
- **最关联知识点**：知识点 21，知识点 45，知识点 53
- **主要题型**：（1）正态总体均值的检验；（2）正态总体方差的检验。
- **综述**：对于假设检验的题型，首先要清楚所要检验的问题，跟据问题给出原假设和备择假设；其次要了解检验条件（如方差已知还是未知），根据条件及检验问题来选取相应的检验统计量，由此给出拒绝域（拒绝域针对的是原假设）；最后根据样本值作出判断。

54.3　经典例题精解巧析

例 54.3.1（难度系数 0.4）　假设某校考生数学成绩服从正态分布，随机抽取 25 位考生的数学成绩，算得平均成绩 $\overline{x} = 61$ 分，标准差 s=15 分。若在显著性水平 0.05 下是否可以认为全体考生的数学平均成绩为 70 分？

解析：本题考查在 σ^2 未知的条件下，关于 H_0：$\mu = \mu_0$ 的检验（u 检验）。

解：在 H_0：$\mu = 70$ 的条件下，根据方差未知，得检验统计量为 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，拒绝域为 $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，其中 $n = 25$，$\alpha = 0.05$，查表知 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(24) = 2.0639$。

代入计算得 $\left|\dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{61-70}{15/\sqrt{25}}\right| = |-3| = 3 > 2.0639$，落入拒绝域，故拒绝该假设，即不可以认为全体考生的数学平均成绩为 70 分。

招数 54.3.1 妙招：假设检验的步骤，一是根据检验参数和已知条件确定检验统计量；二是根据备择假设确定拒绝域；三是根据相关计算结果下结论。

例 54.3.2（难度系数 0.4）根据环境保护条例，在排放的工业废水中，某有害物质不得超过 0.5‰，假定有害物质含量 X 服从正态分布。现在取 5 份水样，测定该有害物质含量，得如下数据：

0.530‰，0.542‰，0.510‰，0.495‰，0.515‰。

能否据此抽样结果说明有害物质含量超过了规定（$\alpha = 0.05$）？

解析：本题考查 σ^2 未知的条件下，关于 H_0：$\mu = \mu_0$ 的检验（t 检验）。

解：H_0：$a \leqslant 0.5$（‰），H_1：$a > 0.5$，因 σ^2 未知，故拒绝域为 $\dfrac{\overline{x} - 0.5}{s}\sqrt{5} > t_{0.05}(4)$。

根据样本值计算得 $\overline{x} = 0.5184$，$s = 0.018$。因为

$$t = \frac{\overline{x} - 0.5}{s}\sqrt{5} = 2.2857 > t_{0.05}(4) = 2.1318,$$

所以拒绝 H_0，说明有害物质含量超过了规定。

招数 54.3.2 无招胜有招：均值的检验，方差已知用 u 检验，方差未知用 t 检验。

例 54.3.3（难度系数 0.6）测定某种溶液中的水份，根据它的 10 个样本测定值计算知样本方差为 $s = 0.037\%$，设测定值总体为正态分布，试在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 H_0：$\sigma^2 \geqslant (0.04\%)^2$，$H_1$：$\sigma^2 < (0.04\%)^2$。

解析：本题考查 μ 未知条件下关于 σ^2 的假设检验（χ^2 检验）。

解：（1）提出假设 H_0：$\sigma^2 \geqslant (0.04\%)^2$；$H_1$：$\sigma^2 < (0.04\%)^2$。

（2）由于 μ 未知，所以可得 H_0 的拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$。

（3）根据条件可知 $n = 10$，$\alpha = 0.05$，$s = 0.037\%$，查表知 $\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$，代入计算得

$$\frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} = \frac{9 \times 0.037^2}{(0.04\%)^2} = 7.701 > \chi^2_{0.95}(9)。$$

（4）故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0：$\sigma^2 \geqslant (0.04\%)^2$。

招数 54.3.3 无招胜有招：方差的检验，χ^2 检验，当均值已知自由度为 n，当均值未知自由度为 $n-1$。

例 54.3.4（难度系数 0.6，跨知识点 51）设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值 $\overline{x} = 10$，样本方差 $s^2 = 0.16$。（1）求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间；（2）在显著性水平为 0.05 条件下检验假设 H_0：$\sigma^2 \leqslant 0.1$。

解析：本题考查正态总体（1）在方差未知情况下均值的置信区间；（2）在均值未知情况下的方差单侧检验。

解：（1）方差未知，故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 下的置信区间为

$$(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})。$$

根据条件 $\overline{X} = 0, s = 0.4, n = 16, \alpha = 0.05, t_{0.025}(15) = 2.132$，代入计算得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）。

（2）均值未知，关于 H_0：$\sigma^2 \leqslant 0.1$ 的拒绝域为 $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$。代入值后可知 $\chi^2 = \frac{15s^2}{0.1} = 15 \times 1.6 = 24$，$\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$。因为 $\chi^2 = 24 < 24.996 = \chi^2_{0.05}(15)$，所以接受 H_0。

招数 54.3.4 无招胜有招：单侧检验中，检验统计量根据检验参数和已知条件确定，其拒绝域和备择假设在形式上保持统一。

例 54.3.5 （难度系数 0.6）某酒厂用自动装瓶机装酒，每瓶规定重 500 克，标准差不超过 10 克，每天定时检查。某天抽取 9 瓶，测得平均重为 $\overline{X}$ =499 克，标准差为 s = 16.03 克。假设瓶装酒的重量 X 服从正态分布，问这台机器是否工作正常（$\alpha=0.05$）？

解析：本题考查 σ^2 未知的条件下，关于 H_0：$\mu=\mu_0$ 的检验（t 检验）及方差的单侧检验。

解：先检验 H_0：$\mu=500$，H_1：$\mu\neq 500$。

由于方差未知，故可取统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-500}{S/\sqrt{n}}$，其拒绝域为 $|t|>t_{0.025}(8)=2.3060$，根据条件 $\overline{x}=499$，$s=16.03$，$n=9$，$\alpha=0.05$，代入计算得

$$t=\frac{\overline{x}-500}{s/\sqrt{n}}=\frac{499-500}{16.03/3}=-0.187,$$

未落入拒绝域，故接受 H_0。

再检验 H_0'：$\sigma^2\leqslant 10^2$，H_1'：$\sigma^2>10^2$。

由于均值未知，故取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{10^2}$，其拒绝域为 $\chi^2>\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，代入计算得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{10^2}=\dfrac{8\times 16.03^2}{10^2}=20.557$，落入拒绝域，故拒绝 H_0'：$\sigma^2\leqslant 10^2$。

综上可知，该机器工作无系统误差，但不稳定。

知识点 55　两个正态总体均值与方差的假设检验

更多资源请扫二维码：

55.1　结论

两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$、$N(\mu_2,\sigma^2)$ 参数的假设检验（以下均为上 α 分位数）。

结论 55.1.1　两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$、$N(\mu_2,\sigma^2)$ 均值的假设检验（t 检验）。

检验假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$,拒绝域为 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$；

检验假设 H_0：$\mu_1\geqslant\mu_2$，统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，拒绝域为 $t<-t_\alpha(n_1+n_2-2)$；

检验假设 H_0：$\mu_1 \leqslant \mu_2$，统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，拒绝域为 $t>t_\alpha(n_1+n_2-2)$，其中 $s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$。

结论 55.1.2　两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 方差的假设检验（F 检验）。

检验假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域为 $F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$；

检验假设 H_0：$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$，统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域为 $F<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$；

检验假设 H_0：$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$，统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域为 $F>F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$。

55.2　知识点及解题方法综述

- **知识点考频**：2
- **最关联知识点**：知识点 21，知识点 45，知识点 53
- **主要题型**：（1）两个正态总体方差相等时均值是否相等的假设检验；（2）两个正态总体方差是否相等的假设检验。
- **综述**：对两个正态总体的假设检验，首先根据所要检验的问题设出原假设和备择假设，再结合检验条件（如方差已知还是未知）选取相应的检验统计量，并由此给出拒绝域（拒绝域和原假设有关），最后根据样本值作出判断。在关于均值相等的检验的实际问题中，若方差未给定，为了应用条件还需对方差进行齐性检验。

55.3　经典例题精解巧析

例 55.3.1（难度系数 0.6）　设有两批棉纱，为比较其断裂强度，从中各取一个样本，测试得到：第一批棉纱样本，n_1=200，$\bar{x}$=0.532kg，s_1=0.218kg；第二批棉纱样本，n_2=200，$\bar{y}$=0.57kg，s_2=0.176kg，设两个强度总体均服从正态分布，方差未知但相等，问两批棉纱断裂强度均值有无显著差异（α=0.05）？

解析：本题考查两个正态总体在方差相等的情况下，关于均值是否相等的检验。

解：提出假设，H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$。

由于方差未知但相等，故取统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，拒绝域为 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$。

由条件知 $n_1=n_2=200$，$\alpha=0.05$，查表知 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(398)\approx z_{0.025}=1.96$。

计算得$s_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\dfrac{199\times(0.218^2+0.176^2)}{398}}=0.1981$。

代入检验统计量得

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{(0.532-0.57)}{0.1981\times\sqrt{\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{200}}}=-1.918。$$

其拒绝域为$|t|>t_{0.025}(398)=1.96$，未落入拒绝域，所以接受 H_0，认为两批强度均值无显著差别。

例 55.3.2 （难度系数 0.8） 两位化验员 A、B 对一种矿砂的含铁量各自独立地用同一方法做了 5 次分析，得到样本方差分别为 0.4322 与 0.5006，若 A、B 所得的测定值的总体都是正态分布，其方差分别为$\sigma_A{}^2$、$\sigma_B{}^2$，试在显著性水平α =0.05 下检验方差齐性的假设

$$H_0：\sigma_A^2=\sigma_B^2，H_1：\sigma_A^2\neq\sigma_B^2。$$

解析：本题考查两个正态总体方差齐性即方差相等的检验，其检验统计量为$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$。

解：由条件知 $n_1=n_2=5，\alpha=0.05，s_1^2=0.4322，s_2^2=0.5006$，查表知 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(4,4)=9.6$，$F_{0.975}(4,4)=\dfrac{1}{F_{0.025}(4.4)}=\dfrac{1}{9.6}=0.1042$。

针对原假设，可取统计量为$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域为$F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或者 $F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$，代入计算可得$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=\dfrac{0.4322}{0.5006}=0.8634$。由于 $F_{0.975}(4,4)<F<F_{0.025}(4,4)$，所以接受 H_0，拒绝 H_1。

例 55.3.3 （难度系数 0.6） 设$X_1,X_2,\cdots,X_7$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_8$是来自正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的简单随机样本，且两个样本相互独立，它们的样本均值分别为$\overline{x}=13.8,\overline{y}=17.8$，样本标准差$s_1=3.9，s_2=4.7$，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为$\mu_1<\mu_2$？

解析：对方差未知的两个正态总体，首先要检查两个正态总体方差是否相等。只有在方差相等的情况下才能应用公式检验两者均值的大小。

解：先检验H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，检验统计量$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域$F>F_{0.025}(6,7)=5.12$或者 $F<F_{0.975}(6,7)=\dfrac{1}{F_{0.025}(7,6)}=\dfrac{1}{5.70}$。

根据条件 $\overline{x}=13.8，\overline{y}=17.8$，$n_1=7，n_2=8$；$s_1=3.9，s_2=4.7$，代入得

$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{3.9^2}{4.7^2}=0.6885$，未落入拒绝域，故接受 H_0，可认为方差相等。

再检验 H_0'： $\mu_1<\mu_2$，统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，拒绝域为 $t>t_{0.05}(13)=1.7709$，代入计算得 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=-1.7773$，接受 H_0'，即可以认为 $\mu_1<\mu_2$。

注：检验两个正态总体均值相等时，应先检验它们的方差相等。

例 55.3.4（难度系数 0.8） 检验了 26 匹马，测得每 100 mL 的血清中，所含的无机磷平均为 3.29mL，标准差为 0.27mL；又检验了 18 头羊，每 100 mL 血清中含无机磷平均为 3.96 mL，标准差为 0.40 mL；设马和羊的血清中含无机磷的量都服从正态分布，试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下，马和羊的血清中无机磷的含量有无显著性差异？

解析：对于方差未知的两个正态总体，首先要检查两个正态总体方差是否相等。只有在方差相等的情况下才能应用公式检验两者均值是否相等。

解：设马和羊的血清中无机磷的含量分别为 X 和 Y，由已知条件可知，$\bar{x}=3.29$，$s_1=0.27$，$\bar{y}=3.96$，$s_2=0.40$.根据题目要求，应检验 μ_1 是否等于 μ_2。但因不知方差 σ_1^2 和 σ_2^2，所以应先检验 σ_1^2 是否等于 σ_2^2。

先取 H_0^1：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1^1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。

检验统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}>F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{ 或 }\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)。$$

由于 $n_1=26$，$n_2=18$，$\alpha=0.05$，$s_1=0.27$，$s_2=0.40$，查 F 分布的分位数表得

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.0975}(25,17)=2.56,$$

$$F_{0.025}(25,17)=\frac{1}{F_{0.975}(17,25)}=\frac{1}{2.41}=0.415。$$

代入值进行计算得 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=\dfrac{0.27^2}{0.40^2}=0.46$。由于 0.415＜0.46＜2.56，这说明计算结果未落入否定域，故接受 H_0^1：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$。

在认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 的基础上，检验：H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$。

检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，其拒绝域为 $\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$，查 t 分布分位数表得 $t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.0975}(42)=2.021$。

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{25\times0.27^2+17\times0.40^2}{42}=0.1082,$$

$$S_w=0.329,\quad \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sqrt{\frac{1}{26}+\frac{1}{18}}=0.307\text{，}\quad \bar{x}-\bar{y}=-0.67\text{。}$$

代入计算得检验统计量 $T=\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|=\dfrac{0.67}{0.329\times0.307}=6.63>2.021$。说明计算结果落入了拒绝域，所以在$\alpha$＝0.05 条件下，认为马和羊的每 100mL 血清中无机磷含量有显著性差异。

第 8 篇综合测试题

8.1 在假设检验问题中，犯第一类错误的概率α的意义是（　　）（知识点 53，难度系数 0.2）

（A）在H_0不成立的条件下，经检验H_0被拒绝的概率

（B）在H_0不成立的条件下，经检验H_0被接受的概率

（C）在H_0成立的条件下，经检验H_0被拒绝的概率

（D）在H_0成立的条件下，经检验H_0被接受的概率

8.2 设总体$X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$，σ_0^2已知，检验假设H_0：$\mu=\mu_0$，备择假设H_1：$\mu>\mu_0$，取拒绝域为$\bar{X}>c$，则对固定的样本容量n，犯第一类错误的概率α随c的增大而_____。（知识点 53，难度系数 0.2）

8.3 某超市为增加销售，对营销方式、管理人员等进行了一系列调整，调整后随机抽查了 9 天的日销售额（单位：万元），经计算知$\bar{x}=54.5$，$s^2=11.13$。据统计调整前的日平均销售额为 51.2 万元，假定日销售额服从正态分布。试问调整措施的效果是否显著？（$\alpha=0.05$）（知识点 54，难度系数 0.2）

8.4 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005（Ω）。今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 s=0.007（Ω），设总体为正态分布，问在显著性水平α=0.05 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大。（知识点 54，难度系数 0.6）

8.5 测量某种溶液中的水分，从它的 10 个测定值得出$\bar{x}=0.452\%$，$s=0.037\%$，设测定值总体为正态分布，μ为总体均值，σ为总体标准差，试在显著性水平$\alpha=0.05$下检验：（1）H_0：$\mu=0.5\%$，H_1：$\mu<0.55\%$；（2）H_0'：$\sigma=0.04\%$，H_1'：$\sigma<0.04\%$。（知识点 54，难度系数 0.6）

8.6 某工厂正常生产时，排出的污水中动植物油的浓度$X\sim N(10,1)$，今阶段性抽取 10 个水样，测得平均浓度为 10.8（mg/L），标准差为 1.2（mg/L），问该工厂生产是否正常？（$\alpha=0.05$）（知识点 54，难度系数 0.8）

8.7 设总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$相互独立，样本容量分别为$n_1$、$n_2$，样本

方差分别为 S_1^2、S_2^2，在显著性水平 α 下，检验 H_0：$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 的拒绝域为（　）。（知识点 55，难度系数 0.2）

（A）$\dfrac{s_2^2}{s_1^2} \geqslant F_\alpha(n_2-1, n_1-1)$　　（B）$\dfrac{s_2^2}{s_1^2} \geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$

（C）$\dfrac{s_2^2}{s_1^2} \leqslant F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$　　（D）$\dfrac{s_2^2}{s_1^2} \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

8.8　为了了解某种添加剂对预制板的承载力有无提高作用，现用原方法（无添加剂）及新方法（有添加剂）各浇制 10 块预制板，记 X 表示无添加剂时预制板的承载力，Y 表示有添加剂时预制板的承载力。测得数据如下（单位：kg/cm^3：$\bar{x}=76.23$，$\bar{y}=79.43$，$s_1^2=3.325$，$s_2^2=2.225$，假定两种方法所得的预制板的承载力 X、Y 依次服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 及 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，取显著性水平 $\alpha=0.05$。（1）检验假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$；（2）若（1）中 H_0 成立，再检验 H_0'：$\mu_1 \geqslant \mu_2$，H_1'：$\mu_1 < \mu_2$。（知识点 55，难度系数 0.8）

第 8 篇综合测试题详解

8.1　解析：本题考查第一类错误的概念。

解：依概念，犯第一类错误即犯 H_0 为真，拒绝 H_0 的错误，故选（C）。

8.2　解析：本题考查在特定条件下第一类错误概率的计算。

因为 H_0 成立时，$\bar{X} \sim N(\mu_0, \dfrac{\sigma_0^2}{n})$，由此可得犯第一类（弃真）错误的概率为 $\alpha = P\left\{\bar{X} > c \middle| H_0\right\} = 1-\varPhi(\dfrac{c-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}})$，所以犯第一类错误的概率 a 随 c 的增大而减小。

解：减小。

8.3　解析：本题考查 σ^2 未知的条件下，关于 H_0：$\mu=\mu_0$ 的检验（u 检验）。

解：需要检验的假设为 H_0：$\mu \leqslant \mu_0 = 51.2$，$H_1$：$\mu > \mu_0 = 51.2$。因为方差 σ^2 未知，所以检验统计量为 $T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$，拒绝域为 $U > t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595$。代入样本值可得 $T = 2.968 > t_{0.05}(8)$，落在拒绝域内，故拒绝原假设 H_0，即认为调整措施效果显著。

8.4　解析：本题考查正态总体在均值 μ 未知条件下的方差 σ^2 的检验。

解：检验假设为

$$H_0：\sigma^2 \leqslant 0.005^2，H_1：\sigma^2 > 0.005^2。$$

取检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，故拒绝域为

$$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.05}(8)=15.507\text{。}$$

代入样本值可得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\dfrac{8\times0.007^2}{0.005^2}=15.68>15.507$，落在拒绝域内，因此拒绝 H_0，认为导线的标准差显著偏大。

8.5 解析：本题考查正态总体在方差 σ^2 未知的条件下，关于均值 $\mu=\mu_0$ 的假设检验以及均值 μ 未知的条件下，关于方差 σ^2 的检验。

解：（1）依题可得 $\mu_0=0.5\%$，$n=10$，$\alpha=0.05$，$t_{\alpha}(n-1)=t_{0.05}(9)=1.8331$，$\overline{x}=0.452\%$，$s=0.037\%$，取检验统计量为 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，代入样本值计算可得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{(0.452-0.5)}{0.037}\times\sqrt{10}=-4.10241\text{。}$$

因为 $t<-t_{0.05}(9)=-1.8331$，所以拒绝 H_0，接受 H_1。

（2）依题可得 $\sigma_0^2=(0.04\%)^2$，$n=10$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{1-\alpha}=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\overline{x}=0.452\%$，$s=0.037\%$。取检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，拒绝域为 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，代入已知量计算得

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9\times0.037^2}{0.04^2}=7.7006\text{。}$$

因为 $\chi^2>\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，所以接受 H_0，拒绝 H_1。

8.6 解析：同 8.5 题。

解：（1）检验假设 H_0：$\sigma^2=1$，H_1：$\sigma^2\neq1$。取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$；拒绝域为 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=2.70$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}=19.023$，代入样本观察值并计算得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times1.2^2}{1}=12.96$，由于 $\chi^2=12.96\in(2.700,19.023)^2$，故接受 H_0，即可以认为排出的污水中动植物油浓度的方差为 $\sigma^2=1$。

（2）检验假设 H_0'：$\mu=10$，H_1'：$\mu\neq10$。取统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-10}{S/\sqrt{10}}\sim t_{\frac{\alpha}{2}}(9)$；拒绝域为 $|t|\geqslant t_{0.025}(9)=2.2622$，$|t|=\dfrac{10.8-10}{1.2/\sqrt{10}}=2.1028<2.2622$，所以接受 H_0'，即可以认为排出的污水中动植物油的平均浓度是 10（mg/L）。

综上所述，可以认为工厂生产正常。

8.7　解析：根据两个正态总体方差的假设检验公式确定结论。

根据公式，在检验 H_0：$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 时，统计量为

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right),$$

拒绝域为 $F < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$，故 $\frac{s_2^2}{s_1^2} \geqslant \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} = F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1)$。因此应选（A）。

解：（A）。

8.8 解析：对于方差未知的两个正态总体，首先要检查两个正态总体方差是否相等。只有在方差相等的情况下才能应用公式检验两者均值的大小。

解：首先检验方差是否相等。

因为 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，由样本观察值计算得 $f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3.325}{2.225} = 1.49$，查表知 $F_{0.025}(9,9) = 4.03$，$F_{0.975}(9,9) = 0.248$。

因为 $0.248 < 1.49 < 4.03$，故应接受 H_0，即认为两种方法的方差无显著差异，可认为相等，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

其次，在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的前提下，检验假设 H_0'：$\mu_1 \geqslant \mu_2$，H_1'：$\mu_1 < \mu_2$。

因为 $T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$；由样本观察值计算得 $s_w = \sqrt{2.775}$，

$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -4.295$。查表得 $t_{0.05}(18) = 1.734$，$t_{0.025}(18) = 2.101$。

因为 $-4.295 < -1.734$，所以应拒绝 H_0'，即认为加进添加剂生产的预制板承载力有明显提高。

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036